

IL CALCOLO DELLE PROBABILITA' NEL BRIDGE

ABSTRACT

Nei primi paragrafi vengono spiegati i meccanismi basilari del Bridge; quali sono gli aspetti che lo differenziano dagli altri giochi di carte e perché viene considerato uno sport della mente. Vengono illustrate le regole principali e lo svolgimento di una partita.

Successivamente vengono affrontati gli aspetti probabilistici collegati al gioco del Bridge:

-si spiega come, utilizzando il calcolo combinatorio, si possano ottenere le probabilità delle diverse distribuzioni di carte e la probabilità di avere un determinato numero di carte in un seme

-vengono illustrate le manovre utili per realizzare prese, calcolando per ognuna la probabilità di riuscita

-si analizzano le corrette linee di gioco da seguire per massimizzare le probabilità di successo.

Infine si prendono in considerazione alcune smazzate stabilendo il piano di gioco vincente calcolato combinando le probabilità di riuscita delle varie manovre.

1. Il bridge

Il "Contract Bridge" o, più semplicemente il "Bridge" è un gioco di carte universalmente conosciuto e denominato ovunque allo stesso modo. Si gioca in quattro, a coppie contrapposte e, a differenza degli altri giochi, nel bridge le carte rappresentano solamente lo strumento necessario per sviluppare le manovre.

Il termine bridge sottolinea quel ponte ideale che viene a formarsi tra compagni di coppia.

Il bridge da semplice gioco diviene anche competizione e attività agonistica attorno al 1930, quando cominciano a costituirsi le varie Leghe Nazionali e i vari Organismi internazionali che coordinano l'attività e organizzano gare e campionati.

Esso rientra nella categoria degli sport "mentali" e ha partecipato come sport dimostrativo alle olimpiadi invernali di Salt Lake City nel 2002.

Lo sviluppo del bridge, che è il gioco più diffuso al mondo e conta oltre 1.500.000 agonisti e decine di milioni di appassionati, è dovuto principalmente al fatto che può essere praticato da chiunque, a qualunque età e in qualsiasi luogo, con costi praticamente nulli, favorisce l'aggregazione e la socializzazione, costituisce elemento formativo per i giovani, abituantoli all'osservanza e al rispetto delle regole, all'analisi, alla sintesi, alla deduzione, alla logica e alla razionalità e costituisce altresì elemento sussidiario per gli anziani per i quali diviene una insostituibile palestra di esercitazione mentale.

2. Le regole del gioco

Il bridge si gioca in quattro a coppie contrapposte.

Nel linguaggio bridgistico i giocatori vengono indicati con i punti cardinali Nord-Est-Sud-Ovest e la coppia si chiama "linea": quindi le linee contrapposte sono Nord-Sud e Est-Ovest.

Si gioca con 52 carte del tipo francese.

Il valore o "rango" dei colori o "semi" è decrescente Picche, Cuori (detti anche "nobili" o "maggiori"), Quadri e Fiori (detti anche "deboli" o "minori").

Le carte si suddividono in "Onori" (A=Asso, K=Re, Q=Donna, J=Fante, T=Dieci), e "Cartine" (tutte le rimanenti), ed hanno valore decrescente (A K Q J 10 4 3 2).

Il bridge è un gioco di prese.

La presa è costituita dalle quattro carte giocate a turno dai giocatori in senso orario ed è vinta da chi ha giocato la carta più alta (ad esempio Nord gioca il J di picche, Est supera con la Q, Sud supera con K, Ovest supera con A e quindi vince la presa).

Ciascun giocatore ha l'obbligo di rispondere nel colore scelto dal primo giocatore, se non possiede alcuna carta in quel colore, giocherà una carta di un altro colore, effettuando uno "scarto".

Chi si aggiudica la presa giocherà per primo la carta successiva.

Le prese che una coppia può realizzare sono al massimo 13 (numero di carte posseduto da ogni giocatore) quindi per vincere è necessario realizzarne almeno una in più degli avversari ossia più di sei. Per questo, ai fini della vittoria, si calcolano solo le prese realizzate oltre la sesta che quindi, per vincere, possono andare da un minimo di uno (6+1=7) ad un massimo di sette (6+7=13 prese).

Il gioco del bridge si articola su due distinte fasi: la licitazione e il gioco della carta.

Lo scopo della licita è quello di determinare attraverso un'asta, cui partecipano i quattro giocatori, in due coppie contrapposte, il numero di prese ("contratto") che si intendono realizzare attraverso il gioco della carta. Ogni dichiarazione deve superare la precedente e può superarla o per rango (picche > cuori > quadri > fiori) o per numero di prese (da 1 a 7). Per dichiarare si utilizza un'apposito contenitore ("Bid in box").



Nella fase di dichiarazione la coppia può scegliere un colore dominante, detto "atout", o decidere di giocare un contratto a Senza Atout. Nel caso venga scelto un colore dominante, il giocatore che ha terminato le carte di un seme può, qualora questo seme venga nuovamente giocato, utilizzare una carta del seme prescelto per "tagliare" aggiudicandosi così la presa. Se più di un giocatore ha terminato le carte di un seme ed entrambi decidono di tagliare (il secondo si chiama "surtaglio") vince la presa chi ha tagliato con la carta più alta.

Nel caso invece si decida di giocare a Senza Atout qualsiasi carta scartata non potrà mai concorrere a vincere la presa. Quindi in questo caso solo l'Asso di cuori è più alto del Re di cuori, mentre l'Asso di un altro seme non è più alto del Re di cuori.

E' evidente che nella scelta tra giocare un contratto ad atout o senz'atout sarà determinante il numero delle carte possedute dalla coppia in un colore.

La dichiarazione avrà termine quando su una licita di un giocatore gli altri tre passeranno, ovvero non effettueranno nessuna licita ulteriore.

La dichiarazione finale costituisce il contratto che dovrà essere realizzato. Colui che si aggiudica l'asta deve quindi realizzare il numero di prese dichiarato, mentre l'altra coppia dovrà cercare di impedirlo ("controgio").

Vediamo un esempio di dichiarazione (da leggere per righe orizzontali)

Ovest	Nord	Est	Sud
1♦	passo	1♠	2♣
2♠	3♣	3♥	passo
4♠	passo	passo	passo

Avendo Nord, Est e Sud detto consecutivamente "passo", la dichiarazione termina.

La coppia Est-Ovest si è aggiudicata il contratto impegnandosi a fare almeno 10 prese (6+4) con atout picche.

La realizzazione del contratto comporta un premio, mentre la mancata realizzazione comporta una penalità. Realizzare prese in più comporta punteggi aggiuntivi, ma inferiori a quelli che si sarebbero ottenuti impegnandosi a realizzare tali prese.

Dichiarando e realizzando 2SA (8 prese) si totalizzano 120 punti;

dichiarando 2SA e realizzando una presa in più (9 prese) si totalizzano 150 punti ma ..

dichiarando e realizzando 3SA (le stesse 9 prese) si totalizzano 400 punti !

Tanto più quindi una dichiarazione è buona, quanto più coinciderà con le prese fatte.

3. Lo svolgimento del gioco

All'inizio del gioco il mazziere (uno dei giocatori) distribuisce le carte una per volta in senso orario così che ogni giocatore entri in possesso di 13 carte.

Il mazziere o "dichiarante" deve iniziare la dichiarazione.

Ai soli fini della licitazione, viene attribuito un valore agli onori (Asso 4 punti, Re 3 punti, Donna 2 punti, Fante 1 punto) e l'intero mazzo conta appunto 40 punti, detti "punti onori" o "Milton Work" (dal loro codificatore). Il dichiarante potrà effettuare una dichiarazione se sarà in possesso di almeno 13 punti onori (che, in caso di equa distribuzione tra gli altri tre giocatori dei 27 punti restanti, garantiscono alla sua linea un predominio nel punteggio), oppure dovrà dire "passo" e passare appunto la dichiarazione al suo avversario di sinistra, che si comporterà di conseguenza.

Qualora tutti e quattro i giocatori dichiarassero passo, la smazzata sarà nulla.

Al termine della dichiarazione il giocatore della coppia che per primo avrà nominato il colore prescelto o i senza atout sarà colui che davvero giocherà la mano (il "giocante").

L'uscita iniziale ("attacco") verrà effettuato dal giocatore alla sua sinistra.

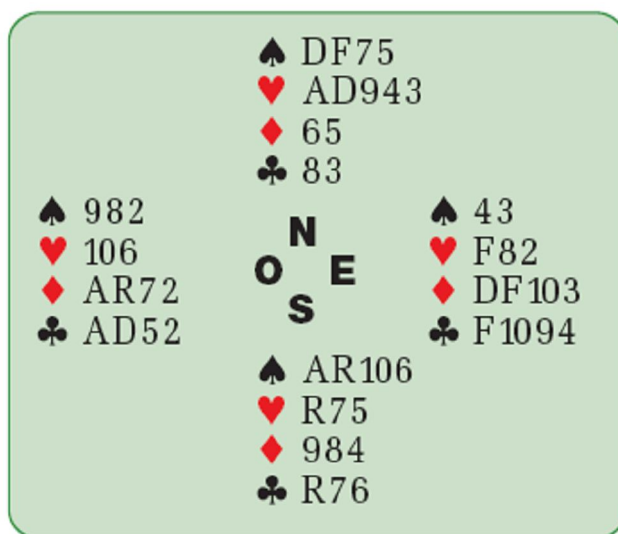
Subito dopo l'uscita iniziale il compagno del giocante, che prende il nome di "morto", scoprirà le proprie carte che resteranno visibili a tutti per l'intera durata del gioco e verranno manovrate dal giocante.

In pratica il giocante vede sia le sue carte che quelle del compagno e gioca con le carte di entrambi cercando di fare il numero di prese che insieme al compagno aveva precedentemente dichiarato; i difensori invece vedono le proprie carte e quelle dell'avversario "morto" e cercano di non far mantenere l'impegno preso al dichiarante.

Vince la prima presa la linea che ha giocato la carta più alta nel seme d'attacco, oppure ha potuto vincere la presa con l'atout dichiarata. Colui che ha vinto la prima presa effettua l'uscita per la seconda e così via sino alla tredicesima e ultima.

Le tredici prese costituiscono la smazzata o mano.

Ecco un esempio di smazzata completa



Dichiarazione	Nord	Est	Sud	Ovest
	passo	passo	1♣	passo
	1♥	passo	1♠	passo
	3♠	passo	passo	passo

Contratto : 3 Picche giocati da Sud

Ovest attacca con A di Quadri, Nord muore ed espone le proprie carte sul tavolo visibili a tutti

4. Il bridge e la fortuna

Terminata una mano e segnato il risultato sull'apposito score le carte di ogni giocatore vengono imbussolate in un contenitore (il "board") e passate al tavolo successivo dove altri giocatori rigiocheranno la medesima mano.



Uno dei motivi del grande successo del Bridge è che è l'unico gioco di carte in cui la fortuna non gioca un ruolo importante. In un torneo di bridge con 20 tavoli (80 giocatori) le carte vengono mescolate all'inizio in ogni tavolo e poi fatte girare in tutti i tavoli di modo che ogni coppia si misuri con le altre della sua stessa linea con i medesimi strumenti (le carte). Vince chi, grazie all'intelligenza, alla logica e all'intesa con il proprio compagno, riesce a trarre maggior profitto (numero di prese) dalle stesse 20 smazzate di tutte le altre coppie. Avere delle "brutte carte" non ha alcuna importanza ai fini della vittoria finale: se in una mano realizziamo anche solo due prese su tredici ma negli altri tavoli le coppie sulla nostra linea ne realizzano una sola noi abbiamo ottenuto il Top ("massimo punteggio").

5. Il calcolo delle probabilità e il bridge

Per vincere un torneo di bridge sono altrettanto importanti sia la fase licitativa che quella di gioco che quella di controgioco.

Le licite effettuate hanno quasi tutte un carattere convenzionale. Dichiarare, per esempio, 1 Cuori non vuol dire che si intende fare solo 7 prese a cuori ma si dà una precisa indicazione al compagno: di avere da 13 a 20 punti e almeno 5 carte di cuori. Imparare un sistema licitativo significa imparare una nuova lingua in cui ognuno dei 35 cartellini (da 1 fiori a 7 senza) ha un diverso significato di per sé stesso, che cambia anche a seconda dei cartellini che sono stati precedentemente estratti dagli altri giocatori.

Per esempio:

Aprire di 2 fiori significa possedere una mano forte in cui si realizzano, da soli, 10 prese (non dà alcuna informazione sul numero di carte di fiori possedute).

Rispondere 2 fiori al compagno che ha dichiarato 1 fiori significa avere una mano debole (meno di 8 punti) con 4 carte di fiori.

Rispondendo 2 fiori al compagno che ha aperto di 1 quadri, 1 cuori o 1 picche si mostra invece una mano positiva di almeno 12 punti indipendentemente dal numero di carte di fiori.

Si risponde 2 fiori al compagno che ha aperto di 1 senza quando si posseggono almeno 9 punti e almeno quattro carte in uno di colori nobili (picche o cuori).

Intervenendo di 2 fiori dopo l'apertura avversaria si mostra al compagno una mano di almeno 12 punti e sei carte di fiori

Comunque non esiste un unico sistema licitativo nel bridge: due giocatori possono accordarsi come meglio credono, ma sono tenuti a spiegare agli avversari il significato delle loro licite. Esiste tuttavia un sistema standard, che varia da nazione a nazione, conosciuto generalmente da tutti: senza precisi accordi normalmente si gioca il sistema standard, che difetta però di precisione.

I sistemi standard affrontano la licita delle mani che si presentano con maggior probabilità (vedremo in seguito quali sono) ma tralasciano quelle più particolari.

Durante la licita occorre un grande affiatamento con il compagno: giocare insieme significa capirsi e entrare nello stesso ordine di idee valutando le carte con lo stesso metro di giudizio.

Un grande giocatore con un partner occasionale può non rendere al massimo e probabilmente alla lunga perderebbe contro una coppia meno forte ma più affiatata.

Durante il gioco invece occorre molta attenzione, una tecnica eccelsa, lo studio sistematico delle varie combinazioni di carte e una continua voglia di migliorarsi. Conoscere la statistica e giocare sempre con le probabilità a favore è fondamentale per un buon giocatore di bridge. Cercherò di spiegare questa affermazione nei capitoli successivi.

6. Probabilità nella distribuzione delle carte

Nel bridge dobbiamo occuparci inizialmente di come un mazzo di 52 carte può essere distribuito tra 4 giocatori. Supponiamo di prendere tredici carte a caso da un mazzo ben mescolato; ci sono cinquantadue possibilità per la prima carta, qualunque essa sia, cinquantuno per la seconda carta, e così via fino a quaranta possibilità per la tredicesima e ultima carta. Il numero delle possibili sequenze formate da tredici carte è perciò dato dal prodotto di tutti i numeri interi da cinquantadue fino a quaranta.

$$52 \cdot 51 \cdot \dots \cdot 41 \cdot 40 = \frac{52!}{(52-13)!} = D_{52,13} = \text{Disposizioni di 52 oggetti distinti di classe 13}$$

Tale numero è pari a quasi 4.000 miliardi di miliardi ($3,954 \times 10^{21}$).

Questo però non rappresenta il numero delle mani che possiamo avere, poiché l'ordine in cui si ricevono le carte non ha nessuna importanza. Una mano di bridge è sempre la stessa, comunque si vari la disposizione delle carte. Non dobbiamo perciò occuparci della disposizione delle carte (permutazioni) ma dei loro raggruppamenti (combinazioni).

Per arrivare al vero valore del numero di mani diverse che si possono avere, occorre dividere il precedente risultato per il numero delle permutazioni possibili di tredici carte (dato dal prodotto di tutti i numeri da tredici fino a 1).

Il numero delle possibili mani diverse di tredici carte per il primo giocatore è pertanto:

$$\frac{52 \cdot 51 \cdot \dots \cdot 41 \cdot 40}{13 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 1} = \frac{52!}{(52-13)! \cdot 13!} = C_{52,13} = \binom{52}{13} = 635.013.599.000$$

Cioè le combinazioni di 52 oggetti distinti di classe 13 (detto coefficiente binomiale).

Per il secondo giocatore sono disponibili trentanove carte ed il numero di mani che si possono formare è

$$\frac{39 \cdot 38 \cdot \dots \cdot 27 \cdot 26}{13 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 1} = \frac{39!}{(39-13)! \cdot 13!} = C_{39,13} = \binom{39}{13} = 8.122.452.444$$

Il numero di mani disponibili per il terzo giocatore è $C_{26,13} = 10.400.600$ mentre per il quarto giocatore rimanendo solo 13 carte rimane solo un'unica possibilità.

Moltiplicando 635.013.599.000 per 8.122.452.444 per 10.400.600 per 1 si ottengono il numero delle mani possibili a bridge, un numero talmente grande da garantire che nessuna mano, con le stesse identiche carte, sia mai stata giocata.

È ovvio che il primo giocatore ha le stesse probabilità di pescare:

- ♠ -
- ♥ ARDJ1098765432
- ♦ -
- ♣ -

piuttosto che:

- ♠ A952
- ♥ J73
- ♦ 10873
- ♣ RD

Sicuramente tutti i giocatori di bridge ricordano di non avere mai avuto 13 carte di cuori mentre non è immediato rendersi conto che probabilmente non hanno mai avuto nemmeno il secondo tipo di mano, con quelle 13 carte esatte. Una 4-3-4-2 capita molto spesso a differenza della 0-13-0-0 ma avere le esatte 13 carte riportate sopra è ugualmente improbabile.

Applicando la formula del calcolo combinatorio $C_{n,k}$ alle lunghezze dei colori si possono calcolare la probabilità di tutte le possibili distribuzioni di carte. Prendiamo come esempio la 5-4-3-1. Per calcolare la frequenza di questa distribuzione occorre moltiplicare il numero delle cinque formabili con le 13 carte di un seme, per il numero delle quaterne formabili con le carte di un secondo seme, per il numero delle terne formabili con le carte di un terzo seme, per il numero dei singoli formabili con l'unica carta del restante seme, ed infine, moltiplicare per il numero dei modi possibili con i quali si possono combinare tra loro i semi componenti la mano.

Abbiamo quindi $C_{13,5} \cdot C_{13,4} \cdot C_{13,3} \cdot C_{13,1} \cdot 4!$.

($4!$ sono i modi possibili di combinare una mano se tutti i semi hanno lunghezza diversa tra loro).

Nell'esempio precedente, attribuendo al seme di picche la prima posizione, la seconda al seme di cuori, la terza al seme di quadri e la quarta al seme di fiori le 24 combinazioni possibili sono:

{5-4-3-1, 5-3-4-1, 5-4-1-3, 5-3-1-4, 5-1-3-4, 5-1-4-3, 4-5-3-1, 4-5-1-3, 4-3-5-1, 4-3-1-5, 4-1-5-3, 4-1-3-5, 3-5-4-1, 3-5-1-4, 3-4-5-1, 3-4-1-5, 3-1-5-4, 3-1-4-5, 1-5-4-3, 1-5-3-4, 1-4-5-3, 1-4-3-5, 1-3-5-4, 1-3-4-5}.

Se due semi hanno la stessa lunghezza i modi possibili di combinarli sono: $\frac{4!}{2!} = 12$. In questo caso abbiamo una permutazione con ripetizione in quanto la lunghezza di due colori è uguale tra loro.

Indicando con k_1, k_2 fino a k_r il numero di volte che si ripetono rispettivamente gli elementi 1, 2 e r , le permutazioni con ripetizione divengono:

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

Si tratta, infatti, di dividere il numero delle distinte permutazioni di n oggetti, nel nostro caso i semi delle carte, per il numero delle permutazioni di $k_1!$ ossia il numero degli stessi elementi uguali tra loro, nel nostro caso il numero dei semi con la stessa lunghezza.

Questa formula vale per qualsiasi permutazione, anche senza ripetizione di elementi, infatti se k_1, k_2, \dots, k_r si ripetono solo una volta, si ottiene esattamente la formula delle permutazioni semplici in quanto si ottiene:

$$\frac{n!}{1! \cdot \dots \cdot 1!} = n!$$

Se tre semi hanno la stessa lunghezza, i modi possibili di combinarli, usando la formula precedente delle permutazioni con ripetizioni sono: $\frac{4!}{3!} = 4$.

Tornando all'esempio, nel caso di una distribuzione 5-4-3-1 abbiamo quindi: $C_{13,5} \cdot C_{13,4} \cdot C_{13,3} \cdot C_{13,1} \cdot 24$

$$C_{13,5} = \frac{13!}{5!8!} = 1287.$$

$$C_{13,4} = \frac{13!}{4!9!} = 714.$$

$$C_{13,3} = \frac{13!}{3!10!} = 286.$$

$$C_{13,1} = \frac{13!}{1!12!} = 13.$$

Abbiamo 1287 cinquine ottenibili con le 13 carte del primo seme, 714 le quaterne ottenibili con le 13 carte del secondo seme, 286 sono le terne formabili con le tredici carte di un terzo seme, 13 sono i singoli formabili con le tredici carte del quarto seme, ed infine, 24 sono le modalità con le quali si possono combinare i semi tra loro:

$$1.287 \cdot 715 \cdot 286 \cdot 13 \cdot 24 = 82.111.732.560.$$

Dividendo questo risultato per il numero delle mani possibili 635.013.599.000 ottenuto in precedenza, otteniamo:

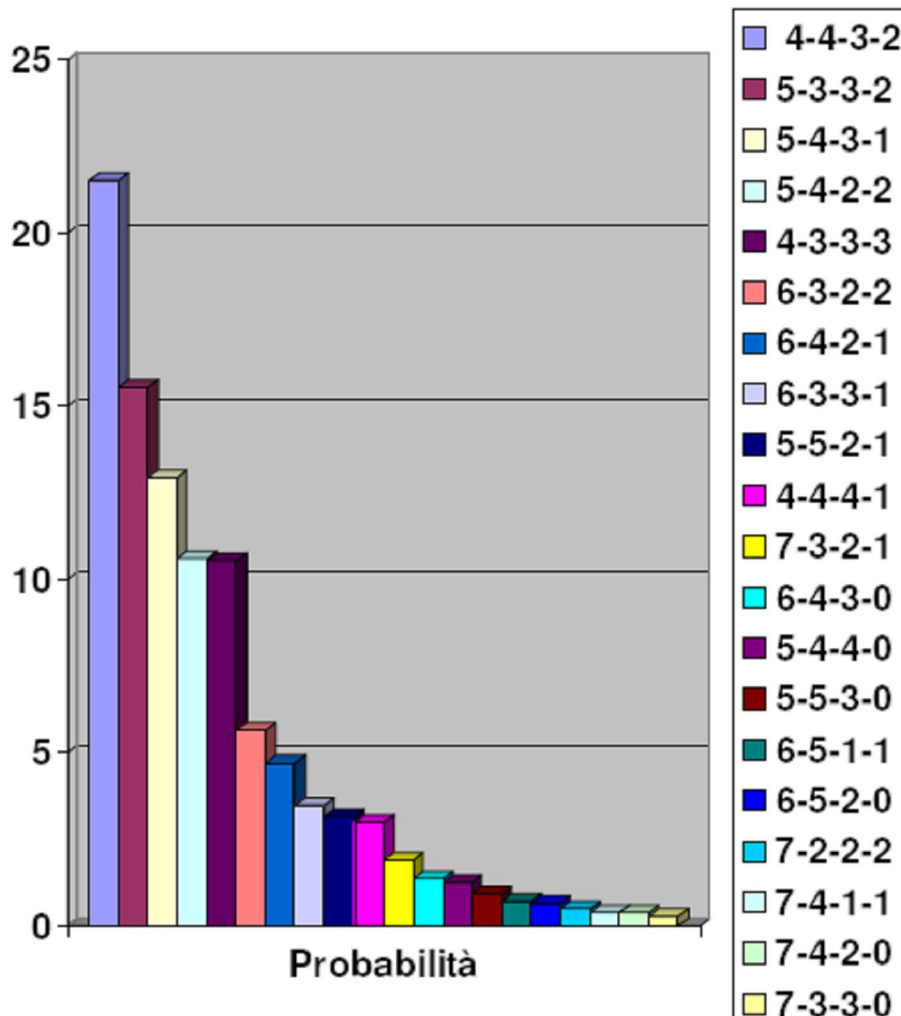
$$\frac{82.111.732.560}{635.013.599.000} = 0.1293$$

Abbiamo quindi il 12,93% di avere una 5-4-3-1 qualsiasi.

La seguente tabella riporta, in ordine decrescente di probabilità, le distribuzioni a priori di una mano di bridge.

Distribuzione	Probabilità
4-4-3-2	21,55%
5-3-3-2	15,52%
5-4-3-1	12,93%
5-4-2-2	10,58%
4-3-3-3	10,54%
6-3-3-2	5,65%
6-4-2-1	4,70%
6-3-3-1	3,45%
5-5-2-1	3,17%
4-4-4-1	2,99%
7-3-2-1	1,88%
6-4-3-0	1,33%
5-4-4-0	1,24%
5-5-3-0	0,90%
6-5-1-1	0,71%
6-5-2-0	0,65%
7-2-2-2	0,51%
7-4-1-1	0,39%
7-4-2-0	0,36%
7-3-3-0	0,27%

Dalla tabella si comprende chiaramente perché ogni sistema prevede l'apertura con la 4-4-3-2 o con la 5-3-3-2 mentre non è prevista l'apertura con la 7-4-1-1.



8. Realizzare prese : Impasse, Expasse e probabilità

Una volta terminata la dichiarazione e stabilito il contratto il giocatore analizza le proprie carte e quelle del morto per stabilire come realizzare le prese stabilite. Consideriamo per esempio la seguente smazzata

NORD : ♠ 7 2
 ♡ A J 4 3
 ♦ A 9 8
 ♣ A 8 6 2

Contratto : 3 SA
 Giocante : Sud
 Carta d'attacco : K di picche

SUD : ♠ A T
 ♡ Q T 9
 ♦ K J T 5 4
 ♣ K 7 3

Sud conta le prese vincenti immediate che ha: ♠ una (A) ♡ una (A) ♦ due (AK) ♣ due (AK).
 Totale: 6 prese. Per mantenere il contratto deve realizzarne altre 3 prese (3SA = 6+3 = 9 prese).

Vediamo come è possibile effettuare prese supplementari

Supponiamo di avere le seguenti carte di picche

♠ AD al morto

♠ 73 in mano

E' evidente che se cominciassimo a muovere il colore dal morto (visibile a tutti) gli avversari potrebbero regolarsi di conseguenza: stare bassi sul nostro Asso e coprire (superare) la donna con il Re.

Per **impasse** ("sorpasso") si intende quella manovra che il giocatore fa muovendo una carta verso una mano contenente due carte non consecutive come per esempio Asso e Donna.

Partiamo quindi con il 3 da Sud e, se Ovest possiede il Re, possiamo regolarci in base alla sua giocata (Donna se sta basso, Asso se impiega il Re) ed ottenere così due prese. Ovviamente se il Re si trova in Est non faremo mai più di una presa nel seme.

Il giocatore ottiene due prese tutte le volte che il Re è situato prima della "forchetta" composta da Asso e Donna (50% di probabilità), mentre ne ottiene solo una quando il Re è situato dopo la Donna (50% di probabilità).

Supponiamo ora di avere le seguenti carte

♠ K5 al morto

♠ 73 in mano

Di nuovo se partissimo dal morto gli avversari utilizzerebbero l'Asso per superare il nostro Re.

Per **expasse** si intende quella manovra che il giocatore fa muovendo una carta verso il Re. Tutte le volte che l'Asso è situato prima del Re (50% di probabilità), il Re fa una presa. Quando invece l'Asso è situato dopo il Re (50% di probabilità) non si fanno prese. Partiamo quindi con il 3 dalla mano e, se Ovest possiede il Re, possiamo regolarci in base alla sua giocata ed ottenere una presa. Ovviamente se il Re si trova in Est non faremo mai una presa.

Nella mano dell'esempio sopra nel seme di cuori abbiamo le seguenti carte:

NORD ♥ A J 4 3

SUD ♥ Q T 9

Se partiamo da Sud con la Donna possiamo eseguire il sorpasso al K ed effettuare 4 prese nel seme se il K si trova in Ovest (tornando ogni volta in Sud e ripetendo il sorpasso finché Ovest non gioca il K).

9. Realizzare prese : probabilità nella divisione dei resti

Un tipico problema del bridge è prevedere come sono distribuite tra le due linee di gioco le carte di un certo seme. Per esempio se il dichiarante e il morto hanno complessivamente 7 picche nelle loro due mani è importante sapere come sono divise fra gli avversari le 6 carte restanti di quel colore, perché ciò è, in molti casi, la chiave per giocare correttamente.

Cominciamo supponendo che il giocatore e il morto abbiano 11 carte di picche:

♠ AD9864 al morto in Nord e

♠ F10732 in mano in sud

le carte in possesso degli avversari nel seme sono R5.

A priori il Re ha la stessa probabilità (13/26) di essere in mano ad entrambi gli avversari.

Le probabilità che lo stesso giocatore abbia entrambe le carte di picche si calcola moltiplicando la probabilità che abbia la prima carta ossia 13/26 per la probabilità che abbia la seconda 12/25 dato che gli eventi sono indipendenti. Si ha quindi che la probabilità che il primo avversario abbia le due carte di picche è:

$$P = 13/26 \cdot 12/25 = 6/25 \text{ che rappresenta il } 24\% \text{ dei casi.}$$

Le probabilità che il secondo avversario abbia entrambe le carte di picche sono le stesse quindi la probabilità dei resti divisi 2-0 o 0-2 sono il 48% mentre la probabilità dei resti divisi 1-1 è del 52% essendo la percentuale rimanente.

All'interno del 52% dei resti divisi 1-1, il Re secco è a sinistra la metà delle volte quindi il 26% dei casi e la probabilità del 5 secco è la stessa.

Ricapitolando con un resto di 2 carte:

A) Ovest R Est 5 26%

B) Ovest 5 Est R 26%

Divisione 1-1 52%

C) Ovest R5 Est vuoto 24%

D) Ovest vuoto Est R5 24%

Divisione 2-0 48%

Grazie al calcolo combinatorio si possono calcolare i resti in mano agli avversari anche con resti superiori a 2 carte. Per esempio in un resto di 6 carte calcoliamo la probabilità che le sei carte mancanti siano divise 3-3.

Le possibili distribuzioni delle 26 carte in mano agli avversari sono $\binom{26}{13}$, di queste quelle favorevoli sono quelle in cui un avversario ha 3 carte di picche su sei in circolazione e questo può accadere in $\binom{6}{3}$ modi, da moltiplicare per tutte le possibili distribuzioni delle altre 10 carte in suo possesso che sono $\binom{20}{10}$.

Abbiamo quindi:

$$\frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{20}{10}}{\binom{26}{13}} = \frac{3695120}{10400600} \cong 0,3553 \text{ ossia il } 35,53 \text{ per cento di probabilità}$$

Utilizzando lo stesso meccanismo si può quindi ricavare la tabella delle percentuali di divisione dei resti.

In tale tabella abbiamo anche evidenziato le diverse combinazioni possibili (mancando R5 di picche nella divisione 1-1 si ha la metà delle probabilità di trovare il K a destra e metà a sinistra):

Carte mancanti	Divisione dei resti	Probabilità %	Numero di combinazioni diverse %	Probabilità di ogni combinazione %
2	1-1	52.00	2	26.00
	2-0 0-2	48.00	2	24.00
3	2-1 1-2	78.00	6	13.00
	3-0 0-3	22.00	2	11.00
4	2-2	40.70	6	6.78
	3-1 1-3	49.74	8	6.22
	4-0 0-4	9.56	2	4.78
5	3-2 2-3	67.83	20	3.39
	4-1 1-4	28.26	10	2.83
	5-0 0-5	3.91	2	1.96
6	3-3	35.53	20	1.78
	4-2 2-4	48.45	30	1.61
	5-1 1-5	14.53	12	1.21
	6-0 0-6	1.49	2	0.75
7	4-3 3-4	62.18	70	0.89
	5-2 2-5	30.52	42	0.73
	6-1 1-6	6.78	14	0.48
	7-0 0-7	0.52	2	0.26
8	4-4	32.72	70	0.47
	5-3 3-5	47.12	112	0.42
	6-2 2-6	17.14	56	0.31
	7-1 1-7	2.86	16	0.18
	8-0 0-8	0.16	2	0.08

Le probabilità di questa tabella sono dette probabilità a priori e sono valide in assenza di altre fonti di informazioni (che si possono ottenere dalle dichiarazioni degli avversari, dalla carta d'attacco, o dalle prime battute di gioco e tutto ciò può fare modificare drasticamente le probabilità).

Le ultime due colonne della tabella possono essere utilizzate per calcolare la probabilità di trovare onori secchi (cioè non accompagnati da altre carte dello stesso seme) in mano ad uno degli avversari.

Mancando per esempio tre carte in un seme la probabilità di trovare un onore secco va cercata tra le distribuzioni 2-1: queste sono 6 ognuna col 13% di probabilità, quelle favorevoli sono 2 (non importa quale dei due giocatori abbia l'onore secco) e quindi la probabilità è del 26%.

Possiamo in questo modo ricavare la seguente tabella:

Carte degli avversari	Probabilità di trovare un onore singolo in %	Probabilità di trovare un onore secondo in %	Probabilità di trovare un onore terzo in %
2	52.00	48.00	-
3	26.00	52.00	22.00
4	12.44	40.70	37.30
5	5.66	27.12	40.71
6	2.42	16.15	35.53
7	0.96	8.76	26.90
8	0.36	4.28	17.67

Torniamo ancora alla mano dell'esempio precedente e analizziamo le carte di quadri

NORD : ♦ A 9 8

SUD : ♦ K J T 5 4

Anche in questo caso potremmo effettuare l'impasse alla Donna di Quadri partendo da Nord e giocando l'8 verso la forchetta KJ. Questa manovra ha, come abbiamo visto, il 50% di probabilità di riuscita.

Utilizziamo invece la tabella precedente per calcolare la probabilità che giocando prima l'Asso e poi il Re cada la Donna.

Giocando l'Asso come prima carta vedremo apparire la Donna se uno degli avversari possiede quell'unica carta di quadri. Poiché le carte in mano agli avversari sono 5 (13 meno le nostre 8) dalla tabella si ottiene la percentuale del 5,66 %. Nel caso non sia apparsa la Donna, giocando poi il K la probabilità che cada la Donna è del 27,12% per un totale di $5,66 + 27,12 = 32,78$.

Possiamo quindi concludere che con 8 carte in un seme, mancando la Donna, è conveniente eseguire il sorpasso piuttosto che battere Asso e Re. E' evidente che, per aumentare le nostre chance, prima di fare il sorpasso giocheremo l'Asso in modo da, eventualmente, catturare la Donna secca.

Dalla tabella precedente si possono trarre delle informazioni utili per decidere in quali casi sia più vantaggioso eseguire un'impassa e in quali sia meglio "battere in testa" i nostri onori: sarà meglio battere in testa ogni volta che la probabilità di successo sarà maggiore del 50% (probabilità di riuscita di un'impassa).

Quando gli avversari hanno:

- a) 2 carte tra cui il Re: battere, poiché la probabilità che il Re cada è del 52%;
- b) 3 o 4 carte: eseguire il sorpasso al Re ma non alla Donna o al Fante. La probabilità di trovare un Re secco è inferiore al 50% in entrambi i casi, mentre la probabilità di veder cadere una Donna singola o seconda è del 78% con tre carte mancanti e del 53% con quattro carte mancanti;
- c) 5 o 6 carte: sorpasso al Re o alla Donna, ma non al Fante. La probabilità di trovare una Donna singola o seconda è ben al di sotto del 50%;
- d) 7 o 8 carte: sorpasso al Re, Donna o Fante. La probabilità di caduta del Fante in tre battute (cioè la riuscita della presa sul Fante giocando le atout superiori) è ben al di sotto del 50%.

10. Come giocare una mano: combinazione di probabilità

Torniamo ad analizzare la mano iniziale, alla luce delle considerazioni fatte

NORD :	♠ 7 2	Contratto : 3 SA
	♥ A J 4 3	Giocante : Sud
	♦ A 9 8	Carta d'attacco : K di picche
	♣ A 8 6 2	

SUD :	♠ A T
	♥ Q T 9
	♦ K J T 5 4
	♣ K 7 3

Dopo l'attacco di picche Sud conta 6 prese vincenti immediate: ♠ una (A) ♥ una (A) ♦ due (A K) ♣ due (A K), inoltre sa che se, gli avversari vanno in presa, il suo contratto è battuto poiché incasseranno anche almeno 4 picche. Le picche mancanti infatti sono 13 meno le nostre 4 per un totale di 9 quindi un avversario ne ha almeno 5 e, dopo aver "smontato" il nostro Asso con l'attacco ed essere rientrato in presa in un colore laterale (1^a presa), incasserà anche le altre 4 picche per un totale di almeno 5 prese che sono sufficienti per impedirci di realizzare le nostre 9 prese.

Si tratta quindi di incassare 9 prese senza cedere la mano agli avversari. Possiamo realizzare prese supplementari a cuori eseguendo l'impasse (50% di probabilità di successo) a quadri sempre eseguendo l'impasse (50% di probabilità di successo) o a quadri battendo in testa Asso e Re (33% di probabilità di successo).

Gl'impasse sembrano più convenienti, ma avere il 50% di probabilità di fallire non è certo molto allettante. Esiste un modo per aumentare le nostre probabilità di successo ? E quale dei due impasse conviene eseguire ? Possiamo aumentare le nostre probabilità di successo combinando le probabilità delle diverse giocate. Invece di cominciare eseguendo uno degli impasse, iniziamo battendo in testa Asso e Re di quadri: abbiamo il 33% di probabilità di veder cadere la Dama. Nel caso questo non accada (67% di probabilità) eseguiremo il sorpasso al Re di cuori, questo avrà successo col 33,5% di probabilità (il 50% delle probabilità restanti = 50% di 67%). In questo modo abbiamo giocato col $33\% + 33,5\% = 66,5\%$ di probabilità di successo !!

Analizziamo ora altre mani:

NORD :	♠ A Q 5 4	Contratto : 6 SA
	♥ 6 3	Giocante : Sud
	♦ K Q J 6	Carta d'attacco : T di quadri
	♣ 5 4 2	

SUD :	♠ K 6 2
	♥ A K Q T
	♦ A 5 3
	♣ A J T

Sud conta 11 prese vincenti immediate: ♠ tre (AKQ) ♥ tre (AKQ) ♦ quattro (AKQJ) ♣ una (A), si tratta di trovare la dodicesima presa per realizzare il contratto.

Le possibilità sono: a picche se i resti sono divisi 3-3 tra gli avversari (35,5%)
 a cuori tentando l'impasse al fante (50%)
 a cuori se il fante è secco, secondo o terzo (36,6%)
 a fiori eseguendo un doppio impasse

Il doppio impasse a fiori consiste nel partire due volte da Nord con una cartina e giocare il J e poi il T nel caso Est non metta né la Dama né il Re, se invece Est utilizza un onore lo ammazzeremo con l'Asso di Sud. Vediamo le probabilità di successo di un doppio impasse. Gli onori mancanti (Re e Donna) possono essere così divisi:

OVEST	EST	
A) Re Donna	-	25% di probabilità
B) Re	Donna	25% di probabilità
C) Donna	Re	25% di probabilità
D) -	Re Donna	25% di probabilità

Nel caso A)

	5 4 2	
K Q		-
	A J T	

entrambi gli impasse non hanno successo poiché Ovest utilizza la Donna per catturare il Fante e il Re per il Dieci.

Nel caso B)

	5 4 2	
K		Q
	A J T	

Ovest cattura il Fante col Re ma al secondo impasse, se Est impiega la Dama Sud prende con l'Asso e poi il Dieci è vincente (12^a presa), se Est sta basso Sud utilizza il Dieci e poi l'Asso totalizzando le 12 prese promesse

Nel caso C) con gli onori invertiti la situazione è la stessa e si realizzano sempre 12 prese

Nel caso D)

	5 4 2	
-		K Q
	A J T	

Est, avendo due onori, ne impiega sicuramente uno sul 2 di Nord. Sud utilizza allora l'Asso, al giro dopo Est prende con il secondo onore, ma al terzo giro Sud può fare la 12^a presa con il Dieci.

Il doppio impasse permette di fare una presa aggiuntiva in tre casi su quattro (cioè tranne quando i due onori mancanti seguono la forchetta) e quindi ha il 75% di probabilità di riuscita.

E' possibile combinare delle probabilità come nel caso precedente ?

Osserviamo che, sia nel caso B) che nel C) che nel D) si ottiene la dodicesima presa a fiori dopo aver ceduto una presa agli avversari. Se, prima di eseguire il primo sorpasso a fiori, avessimo battuto AKQ di picche senza aver visto cadere il J, gli avversari, una volta venuti in presa con l'onore di fiori, potrebbero incassare il J di picche mandandoci "down" (sotto) di una presa.

Non c'è allora modo di migliorare il 75% di probabilità ?

Conviene iniziare eseguendo il primo sorpasso a fiori. Dopo questa manovra o Ovest ha fatto presa (casi A B C) oppure Sud ha ammazzato un onore di Est con l'Asso.

Se, caso D (25%), Sud ha ammazzato uno degli onori mancanti con il suo Asso gli basterà giocare il J cedendo la presa agli avversari per poi incassare la 12^a presa col Dieci di fiori.

Se invece, (casi A B C: 75%), Ovest ha fatto la presa a fiori non siamo ancora certi di riuscire a realizzare il contratto (caso A) e le nostre chance sono scese al 66,6 % poiché ora solo 2 casi su tre sono favorevoli. Prima di eseguire il secondo sorpasso, possiamo aumentare le nostre possibilità di mantenere il contratto combinando delle probabilità (senza però mandare in presa gli avversari, quindi senza eseguire il sorpasso a cuori):

battiamo AKD di picche e poi battiamo AKQ di cuori

la probabilità di successo è del $35,5 + 36,6 * (100 - 35,5) = 59,1 \%$.

Solo se le picche non sono 3-3 e il fante di cuori non cade ($100 - 59,1 = 40,9 \%$) eseguiamo il secondo sorpasso (probabilità $66,6 * 40,9 = 27,26 \%$). Totale $59,1 + 27,26 = 86,36 \%$

Giocando così le nostre probabilità di successo sono diventate $25 + 86,36 * 75 = 89,77 \%$

Veniamo alle seguente smazzata:

NORD : ♠ A K J Contratto : 4 ♥
 ♥ Q 8 Giocante : Sud
 ♦ A 5 4 Carta d'attacco : 5 di cuori
 ♣ 6 5 4 3 2

SUD : ♠ 8 5 4
 ♥ A K J T 9 2
 ♦ J 6 3
 ♣ 7

Sud conta 9 prese vincenti immediate: ♠ due (AK) ♥ sei (tutte quelle di sud) ♦ una (A) ♣ zero, si tratta di trovare la decima presa per realizzare il contratto.

L'unica possibilità sembra a picche eseguendo l'impasse alla Donna (50% di probabilità).

Davvero non ci sono speranze migliori? Questa volta non stiamo giocando a senza ma a colore: vediamo quali sono i vantaggi di poter tagliare con il seme di atout.

Osserviamo il seme di fiori: giocando a senza dovremmo pagare agli avversari tutte le carte alte di fiori prima di poter (forse) effettuare prese con le nostre cartine; a colore invece...

Prendiamo l'attacco al morto con l'8 di cuori e giochiamo subito fiori; su qualsiasi ritorno avversario andiamo in presa al morto (per esempio con l'Asso di quadri) e giochiamo fiori per il taglio di Sud con il 2 picche. Se gli avversari hanno risposto sono state giocate 7 carte di fiori. Giochiamo il Dieci di cuori per la Donna del morto e di nuovo fiori tagliata in mano. Ora, se tutti rispondono, le fiori giocate sono 10. "Battiamo" ancora Atout finché gli avversari non le hanno finite e poi torniamo al morto con una l'Asso di picche. Giochiamo ancora fiori per il taglio. Torniamo al morto col Re di picche e giochiamo la nostra quinta fiori che sarà l'ultima in circolazione, a meno che un avversario non ne avesse anche lui almeno 5.

La probabilità, con 7 carte di fiori mancanti, della distribuzione 5-2 o della 6-1 o della 7-2 (cioè quelle che impedirebbero di affrancare la quinta fiori del morto) sono $(30,52 + 6,78 + 0,52) \% = 37,82 \%$ mentre quelle della distribuzione 4-3 a noi favorevole sono del 62,18 %.

Il gioco ad Atout permette di realizzare prese suppletive grazie alla possibilità di tagliare le perdenti che si possiedono. Per questo mentre a Senza si effettua il "piano di gioco" contando le vincenti immediate nel gioco a colore si inizia calcolando le perdenti e studiando il modo di eliminarle (eventualmente tagliandole).

Sulla settimana enigmistica e su molte riviste di bridge, vengono proposte delle mani "a carte viste" ossia con le carte dei 4 giocatori tutte in mostra, e si chiede di effettuare il piano di gioco per mantenere il contratto. Il fatto di poter vedere le carte degli avversari dovrebbe permettere di risolvere tutti i problemi di gioco, invece...

♠ A Q J Contratto : 6 SA
♥ K 8 6 Giocante : Sud
♦ 9 5 2 Carta d'attacco : J di fiori
♣ K 6 5 4

♠ T 8 2 N ♠ 9 5 4
♥ J 7 O ♥ T 9 3 2
♦ K 6 4 3 S ♦ J T 8 7
♣ J T 9 7 ♣ 8 3

♠ K 7 6 3
♥ A Q 5 4
♦ A Q
♣ A Q 2

Sud conta 11 prese vincenti immediate: ♠ quattro (AKQJ) ♥ tre (AKQ) ♦ una (A) ♣ tre (AKQ), si tratta di trovare la dodicesima presa per realizzare il contratto.

Analizziamo i vari semi:

Picche : abbiamo già conteggiato 4 prese che è la massima lunghezza che abbiamo nel colore

Cuori: Est possiede 4 cuori quindi la quarta cuori che possiede Sud non diventa vincente

Quadri: l'impasse non ha successo poiché il Re è dopo la forchetta e quindi cattura la Donna

Fiori: Ovest possiede 4 fiori quindi Sud non può effettuare la 12^a presa con la quarta fiori di Nord

Sembra che nessun seme possa portare la dodicesima presa. In questi problemi non serve ricorrere al calcolo delle probabilità poiché le carte sono tutte in vista, bisogna invece utilizzare la logica e ... tanta esperienza di gioco.

Prendiamo l'attacco con l'Asso di fiori poi giochiamo le nostre vincenti osservando gli scarti degli avversari. Incassiamo dunque A Q J di picche, rientriamo in Sud con l'Asso di cuori e giochiamo il Re di picche su cui Est e Ovest devono scartare: se sbagliano a scartare (Est cuori o Ovest fiori abbiamo guadagnato la dodicesima presa con la nostra lunga in uno dei due semi).

Supponiamo invece che scartino entrambi quadri (e anche noi da Nord). Ora giochiamo 2 giri di cuori (KQ), Est risponde mentre Ovest scarta ancora una quadri. La situazione ora è questa:

♠				
♥				
♦ 9 5				
♣ K 6 5				
♠	N		♠	
♥	O	E	♥ T	
♦ K 6			♦ J T 8	
♣ T 9 7		S	♣ 8	
♠				
♥ 4				
♦ A Q				
♣ Q 2				

Ora tiriamo la Donna di fiori e poi il Re: Est deve scartare e sceglierà ancora quadri. Ecco il finale

♠				
♥				
♦ 9 5				
♣ 5				
♠	N		♠	
♥	O	E	♥ T	
♦ K 6			♦ J T	
♣ T		S	♣	
♠				
♥ 4				
♦ A Q				
♣				

Anche non vedendo l'intera smazzata, possiamo contare le carte per ricavare che Ovest aveva all'inizio: 3♠ (poiché ha scartato al 4° giro) 2♥ (ha infatti scartato al 3° giro) 4♣ (per esclusione poiché Est ne ha solo due avendo scartato al 3° giro) e dunque 4♦.

Ora siamo in Nord: se eseguiamo l'impasse a quadri siamo sotto poiché paghiamo il Re di quadri e poi il Dieci di fiori.

Invece di essere noi ad eseguire l'impasse a quadri possiamo mandare in presa Ovest giocando il 5 di fiori per il suo dieci. Ora Ovest è costretto a giocare quadri poiché ha solo K 6 di quadri e, qualsiasi carta giochi, Sud effettua 2 prese nel colore aggiudicandosi il contratto.

La manovra effettuata si chiama "eliminazione e messa in mano": invece di eseguire l'impasse in un seme abbiamo eliminato i colori laterali e messo in presa l'avversario che si trova dopo la nostra forchetta il quale, costretto a muovere il colore, ci regala l'impasse.

11. Conclusioni

Qual è allora l'importanza del calcolo delle probabilità nel bridge ?

Ecco le risposte di famosi professionisti:

“A basso livello, il calcolo delle probabilità è tutto sommato marginale; a livello medio è di grande utilità (avendo personalmente sperimentato che le conoscenze matematiche-probabilistiche mi hanno aiutato ad avere una migliore visione del gioco ed ottenere migliori risultati); ad alto o altissimo livello queste conoscenze sono già acquisite, e la differenza è data da quel quid in più che un grande campione ha”

“La probabilità nel gioco del bridge è necessaria perchè è importante sapere se, in un resto di 6 carte, è più probabile trovare una ripartizione delle carte 4-2 o 3-3. Noi bridgisti di alto livello sappiamo praticamente a memoria tutte le situazioni basiche del bridge, in quanto a probabilità, e tutte le volte che incontriamo una situazione anomala cerchiamo di studiarla ed analizzarla al tavolo, quindi la probabilità nel bridge è importante ma è già stata immagazzinata nella mente come un dato di fatto; questo non succede a chi pratica il bridge come hobby o passione”

Personalmente penso che chiunque sia davvero appassionato di giochi matematici, di sfide che mettono alla prova l'intelligenza e la logica non potrà non appassionarsi in breve tempo a questo bellissimo gioco: ogni volta che si aprono le 13 carte si è di fronte ad un nuovo enigma da risolvere grazie alle proprie “celluline grigie”.

In questo articolo purtroppo non si è potuto entrare nel dettaglio della fase dichiarativa poichè troppo tecnica ma anche questa, che forse è ancora più avvicente rispetto al gioco stesso, richiede logica, concentrazione, capacità di analisi e sintesi.

Per tutti questi motivi e poichè favorisce anche la socializzazione, la Federazione Italiana di Bridge promuove, in collaborazione col Ministero della Pubblica Istruzione, il gioco del bridge all'interno delle scuole fin dalle elementari.

Bibliografia

Francesco Ferrari, Tesi di Laurea, 2008

Michela Orlandi, Tesi di Laurea, 2007

Siti internet

www.federbridge.it

www.infobridge.it

Breve nota biografica

Cristina Minelli. Insegna Matematica nelle sezioni del Liceo Scientifico Tecnologico dell'Itis Marie Curie di Milano. Laureata in Matematica presso l'Università di Milano, con una tesi sul Calcolo delle Probabilità, ha iniziato la sua professione collaborando per cinque anni con il Politecnico di Milano come esercitatrice di Analisi I, Matlab, Analisi II e Statica. Vinto il concorso del 2000 ha abbandonato il mondo universitario per dedicarsi all'insegnamento nelle scuole superiori.

Durante il periodo universitario ha iniziato a giocare a Bridge a livello dilettantistico, mentre dal 2007 vi si dedica in maniera agonistica. Dal 2004, con la qualifica di Precettore, tiene corsi di Bridge per studenti presso il Liceo in cui insegna e accompagna i suoi allievi a manifestazioni sia a livello regionale che nazionale.

Da quando frequenta l'Università partecipa ai Campionati di Giochi Matematici organizzati dall'Università Bocconi e, dal 2001, vi accompagna i propri studenti.