Annamaria Squellati

# Un po' di
# Matematica
# per il giocatore
# di Bridge

# Indice

# Prefazione

Anche un giocatore di bridge alle prime armi avrà sentito frasi tipo:

“La probabilità che in un palo in cui si hanno 8 carte, la carte degli avversari siano distribuite 3-2 è del 68%”;

“Quando si hanno 9 carte in un palo e manca la $Q$ è meglio battere $A$ e $K$ perché la probabilità di catturare la $Q$, seconda o secca, è maggiore della probabilità che vada bene l’impasse”;

“Se la riuscita di un contratto dipende dalla riuscita di un impasse o dalla divisione 3-3 di un colore è meglio affidarsi all’impasse perché ha la probabilità di riuscita del 50% contro il 36% della divisione 3-3”.

Inevitabilmente, giocando a bridge, si incontrano percentuali e probabilità. Queste paginette vogliono chiarire, in modo elementare, questi concetti.

Per i più curiosi, è poi spiegato come si calcolano le probabilità delle distribuzioni, attraverso il calcolo combinatorio.

Questo articoletto non ha certo la pretesa di insegnare il Bridge, ma vuol mostrare come la Matematica possa aiutare a prendere decisioni.

Dedicato a tutti quelli, che come me, pensano che la Matematica sia anche divertente!

# 1

# Le percentuali

Che cos'è una percentuale? Che cosa esprime? Come si calcola?

Niente di particolarmente difficile. Una percentuale è solo un modo diverso di scrivere un numero.

Il simbolo di percentuale sta ad indicare una divisione per 100. Per esempio, 43% è lo stesso di $\frac{43}{100}$, che si può scrivere anche, come numero decimale, 0,43.

$$43\% = \frac{43}{100} = 0,43$$

Per fare i conti, avendo una piccola calcolatrice, l'ultima è la scrittura più comoda. In certi casi, può essere più immediata la frazione, per esempio, il 50% è "la metà" (divido per 2), il 25% è "un quarto" (divido per 4).

$$100\% = \frac{100}{100} = 1, \qquad 50\% = \frac{50}{100} = 0,5 = \frac{1}{2}, \qquad 25\% = \frac{25}{100} = 0,25 = \frac{1}{4}$$

La percentuale esprime il rapporto tra due quantità, come frazione con denominatore 100.[1]

Per esempio, qual è la percentuale di 33 su 125? È il numero $\frac{33}{125}$. Questa frazione la riscriviamo con denominatore 100. Con la nostra calcolatrice tascabile eseguiamo la divisione 33:125, troviamo 0,264. Dalla notazione decimale si può poi passare alla frazione con denominatore 100.

$$\frac{33}{125} = 0,264 = \frac{26,4}{100} = 26,4\%.$$

Quant'è il 37% di 1564? Con la solita calcolatrice del telefonino calcoliamo il prodotto tra i numeri 0,37 e 1564 e troviamo 578,68.

Se ho pagato 100 € un capo di vestiario scontato al 20%, qual era il suo prezzo iniziale[2]?

Significa che 100 € sono l'80% del prezzo iniziale $x$ €, quindi

$$x \times 80\% = 100,$$

ossia

$$\frac{80x}{100} = 100, \qquad x = \frac{10000}{80} = 125.$$

[1] Generalmente è un numero compreso tra 0 e 1, ma può aver senso anche scrivere, per esempio, 150% (maggiore di 1).

[2] Domanda sentita ad un quiz televisivo. I concorrenti non hanno saputo rispondere.

Il prezzo iniziale era di 125 €.

La probabilità di un evento, che incontreremo nel prossimo capitolo, è un numero compreso tra 0 e 1, che spesso è espresso come percentuale.

## 1.1 Somma e prodotto di percentuali

Le percentuali sono numeri e, quindi, come tutti i numeri si possono sommare e moltiplicare.

La somma avviene in modo naturale, per esempio:

$$23\% + 71\% = 94\%,$$

come si può facilmente controllare

$$\frac{23}{100} + \frac{71}{100} = \frac{94}{100} \qquad \text{oppure} \qquad 0,23 + 0,71 = 0,94.$$

Il prodotto lo è meno. Conviene sempre passare o alle frazioni o alla scrittura decimale. Per esempio, volendo moltiplicare 28% per 65% si può procedere così

$$28\% \times 65\% = \frac{28}{100} \times \frac{65}{100} = \frac{1820}{10000} = \frac{18,2}{100} = 18,2\%,$$

oppure, più semplicemente (la calcolatrice del telefonino è sempre a portata di mano)

$$28\% \times 65\% = 0,28 \times 0,65 = 0,182 = 18,2\%.$$

♣♢♡♠ La riuscita di un contratto dipende dalla divisione delle carte, nelle mani avversarie, di un colore in cui si hanno 7 carte. Il contratto è mantenuto se la divisione è 3-3 oppure 4-2. Le tabelle a pag. 16 ci dicono che la probabilità della divisione 3-3 è il 35,53%, mentre per la 4-2 è il 48,45%; la probabilità di mantenere il contratto è

$$35,53\% + 48,45\% = 83,98\%.$$

La riuscita di un contratto dipende dalla divisione di due colori: è mantenuto, se nel primo, in cui si hanno 8 carte , si trova la 3-2 (probabilità 67,83%), e nel secondo, in cui si hanno 7 carte la 3-3 o la 4-2 (probabilità calcolata sopra: 83,98%). Devono verificarsi entrambe le situazioni. Come vedremo, la probabilità di mantenere il contratto si ottiene facendo il prodotto:

$$67,83\% \times 83,98\% = 0,6783 \times 0,8398 = 0,569\,63634 \simeq 57\%.$$

Ma le probabilità si possono sempre sommare e moltiplicare così? Quando si possono sommare, quando si possono moltiplicare? Questo sarà svelato nel prossimo capitolo.

# 2
# La probabilità

Quella che diamo è la definizione di probabilità "classica".

## 2.1 Una definizione elementare

Consideriamo un esperimento ed i suoi possibili esiti. Per esempio, pensiamo di estrarre una carta da un mazzo di 52. Gli esiti possibili sono evidentemente 52.

Chiamiamo $U$ l'insieme di tutti i possibili esiti. $U$ si chiama *spazio campionario.*

Chiamiamo *evento* l'insieme individuato da una congettura che facciamo sul possibile esito dell'esperimento. Se l'esperimento consiste nell'estrarre una carta da un mazzo di 52, congetture che possiamo fare, per esempio, sono:

"La carta estratta è un $K$";

"La carta estratta è di $\heartsuit$".

Gli eventi sono sottoinsiemi di $U$. Possiamo indicarli con delle lettere $A$, $B, \ldots$

Nel nostro esempio:

$A = \{K\clubsuit,\ K\diamondsuit,\ K\heartsuit,\ K\spadesuit\}$

$B = \{2\heartsuit, 3\heartsuit, 4\heartsuit, 5\heartsuit, 6\heartsuit, 7\heartsuit, 8\heartsuit, 9\heartsuit, 10\heartsuit, J\heartsuit, Q\heartsuit, K\heartsuit, A\heartsuit\}$

Gli elementi di $A$ sono 4, quelli di $B$ 13, quelli di $U$ 52.

Anche $U$ è un evento: è l'*evento certo* ("La carta estratta è una qualsiasi delle 52 del mazzo").

Chiamiamo *probabilità di un evento* $E$ il rapporto tra il numero degli esiti favorevoli (è il numero di elementi dell'insieme $E$) e in numero degli esiti possibili (è il numero di elementi di $U$). Indichiamo col simbolo $p(E)$ la probabilità di $E$

$$p(E) = \frac{\textit{numero degli esiti favorevoli}}{\textit{numero degli esiti possibili}}.$$

Consideriamo il nostro esperimento (estrarre una carta da un mazzo di 52) e i due eventi $A$ e $B$ indicati sopra. Si ha

$$p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \qquad p(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

La probabilità è un numero compreso tra 0 e 1.

$$0 \leq p(E) \leq 1.$$

In particolare, se indichiamo con $\varnothing$ (insieme vuoto) l'*evento impossibile* (per esempio, estrarre dal mazzo una carta che sia contemporaneamente di $\heartsuit$ e di $\spadesuit$), si ha

$$p(\varnothing) = 0, \qquad p(U) = 1.$$

L'evento impossibile ha probabilità nulla, l'evento certo ha probabilità uguale a 1.

**Unione e intersezione**. Dati due eventi $E_1$ ed $E_2$ si possono cosiderare le congetture:
"Si verificano simultaneamente gli eventi $E_1$ ed $E_2$",
"Si verifica almeno uno dei due eventi " (o l'uno o l'altro o entrambi).
Alle congetture corrispondono due eventi che indichiamo

$$E_1 \cap E_2 \qquad \text{ed} \qquad E_1 \cup E_2.$$

I due simboli $\cap$ e $\cup$ si chiamano, rispettivamente, *intersezione* ed *unione.*

Due eventi si dicono *incompatibili*, se il verificarsi dell'uno implica il non verificarsi dell'altro. Se gli eventi $E_1$ ed $E_2$ sono incompatibili, si ha

$$E_1 \cap E_2 = \varnothing.$$

Se due eventi sono incompatibili la probabilità che si verifichino simultaneamente è nulla.

Per esempio, consideriamo l'evento: $C = \{\ Q\spadesuit\}$ ("La carta estratta è la $Q$ di $\spadesuit$").
Gli eventi $A$ e $C$ sono incompatibili, mentre $A$ e $B$ non lo sono (il $K$ di $\heartsuit$ appartiene ad entrambi). Si ha

$$A \cap C = \varnothing, \qquad p(A \cap C) = 0.$$

• *Se due eventi sono incompatibili, la probabilità che si verifichi almeno uno dei due è la somma delle rispettive probabilità.* In simboli

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2).$$

Questo è vero perché il numero di elementi di $E_1 \cup E_2$ è esattamente la somma degli elementi dei due insiemi.

Per esempio, consideriamo gli eventi $A$ e $C$, si ha

$$p(A) = \frac{1}{13}, \qquad p(C) = \frac{1}{52}, \qquad p(A \cup C) = p(A) + p(C) = \frac{1}{13} + \frac{1}{52} = \frac{5}{52}.$$

Infatti l'insieme

$$A \cup C = \{K\clubsuit, K\diamondsuit, K\heartsuit, K\spadesuit, Q\spadesuit\},$$

ha 5 elementi.

Se gli eventi non sono incompatibili, la formula è un pochino più complicata, diventa

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2). \tag{2.1}$$

Questo perché, in questo caso, il numero di elementi di $E_1 \cup E_2$ *non* è la somma degli elementi dei due insiemi, ma un valore minore (gli elementi che appartengono ad entrambi gli insiemi *non* devono essere contati due volte!).

Controlliamo la formula col nostro esempio, considerando gli eventi $A$ e $B$, si ha

$$A \cup B = \{K\clubsuit, K\diamondsuit, K\heartsuit, K\spadesuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit, 4\heartsuit, 5\heartsuit, 6\heartsuit, 7\heartsuit, 8\heartsuit, 9\heartsuit, 10\heartsuit, J\heartsuit, Q\heartsuit, A\heartsuit, \}.$$

$$A \cap B = \{K\heartsuit\}$$

e, chiaramente,

$$p\left(A \cap B\right) = \frac{1}{52}.$$

La formula ci dice che

$$p\left(A \cup B\right) = p\left(A\right) + p\left(B\right) - p\left(A \cap B\right) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

Direttamente, contando gli elementi: $A$ ha 4 elementi e $B$ ne ha 13, ma $A \cup B$ non ha 17 elementi, ne ha 16. Il $K$ di $\heartsuit$ che appartiene ad entrambi *non* va contato due volte. Quindi

$$p\left(A \cup B\right) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

**Evento complementare**. Dato un evento $E$, la congettura "Non si verifica $E$" corrisponde ad un evento che indichiamo $\overline{E}$. $E$ ed $\overline{E}$ sono chiaramente incompatibili. Vale che

$$p\left(E\right) + p\left(\overline{E}\right) = 1,$$

ossia

$$p\left(\overline{E}\right) = 1 - p\left(E\right).$$

**Implicazione di eventi**. Considerati due eventi[1] $E_1$ ed $E_2$, può accadere che se si verifica uno dei due, per esempio l'evento $E_1$ allora, sicuramente, se verifica anche l'altro $E_2$. In tal caso si scrive[2] $E_1 \subset E_2$ e vale che $p\left(E_1\right) < p\left(E_2\right)$.

$\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit$ Avendo 9 carte in un palo, qual è la probabilità di *non* trovare i resti ripartiti 4-0?
Le tabelle di pag. 17 ci dicono che la probabilità della divisione 4-0 (evento $E$) è il 9,56%, quindi quella di non trovare la 4-0 (evento $\overline{E}$) è

$$1 - 9,56\% = 90,44\%.$$

Si può anche fare il calcolo in questo modo. Non trovare la 4-0 equivale a trovare o la 3-1 o la 2-2. Dato che questi eventi sono incompatibili, si possono sommare le relative probabilità. Le tabelle in fondo ci forniscono questo risultato:

$$49,74\% + 40,70\% = 90,44\%.$$

L'evento $E_1$ che corrisponde alla congettura "I resti sono ripartiti 2-2" implica l'evento $E_2$ corrispondente a "I resti non sono ripartiti 4-0". Si ha $E_1 \subset E_2$ e, ovviamente,

$$p\left(E_1\right) = 40,7\% < p\left(E_2\right) = 90,44\%.$$

**Probabilità condizionata**. **Eventi indipendenti**. La probabilità di un evento può essere modificata dalla conoscenza dell'essersi verificato un altro evento. Quando questo accade gli eventi sono detti tra di loro dipendenti.

Se, invece, dati due eventi, il fatto che si si verificato il primo non modifica la probabilità del secondo e, viceversa, il fatto che si sia verificato il secondo non modifica la probabilità del primo, gli eventi sono detti *tra di loro indipendenti.*

---

[1] $E_1 \neq E_2$.

[2] Il simbolo $\subset$ si legge "contenuto".
Un po' di "insiemistica": se $E_1 \subset E_2$ vale che

$$E_1 \cap E_2 = E_1, \qquad E_1 \cup E_2 = E_2.$$

Per esempio, pensiamo ai nostri soliti eventi $A$ (i $K$), $B$ (le $\heartsuit$), $C$ (la $Q\spadesuit$). Se sappiamo che si è verificato l'evento $C$, la probabilità che si verifichino $A$ o $B$ risulta nulla. Ugualmente, se sappiamo che si sono verificati gli eventi $A$ o $B$, la probabilità che si verifichi $C$ è zero. $A$ e $C$ sono tra loro dipendenti, così come $B$ e $C$. Gli eventi $A$ e $C$, così come $B$ e $C$ sono incompatibili. Eventi incompatibili sono sempre dipendenti.

Si possono fare altri esempi di eventi dipendenti. Consideriamo $A \cap B = \{K\heartsuit\}$ e $A$. Se so che la carta estratta è il $K\heartsuit$, che sia un $K$ diventa l'evento certo, quindi la probabilità che si verifichi $A$ diventa 1. Se so che la carta estratta è un $K$, la probabilità che sia di proprio quello di $\heartsuit$ è $\frac{1}{4}$, non più $\frac{1}{52}$. In questo caso la conoscenza del verificarsi di uno dei due eventi fa aumentare la probabilità che si verifichi l'altro. Anche $A \cap B$ e $B$ sono dipendenti. Se so che la carta estratta è il $K\heartsuit$, che sia di $\heartsuit$ è l'evento certo. Se so che la carta estratta è di $\heartsuit$, la probabilità che sia il $K\heartsuit$ diventa $\frac{1}{13}$, non più $\frac{1}{52}$. Anche qui la probabilità aumenta.

Conoscere, invece, che si è verificato l'evento $A$, non modifica la probabilità di $B$. Se so che la carta estratta è un $K$, la probabilità che sia di $\heartsuit$ rimane $\frac{1}{4}$. Ugualmente, conoscere che si è verificato l'evento $B$ non modifica la probabilità di $A$. Se so che la carta estratta è di $\heartsuit$, la probabilità che sia un $K$ rimane $\frac{1}{13}$. Gli eventi $A$ e $B$ sono tra di loro indipendenti.

$\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit$ Eventi indipendenti possono essere la riuscita di due impasse in due colori diversi, la divisione favorevole di due colori diversi, la riuscita di un expasse in un colore e la divisione favorevole di un altro colore.

La *probabilità condizionata* di un evento $E_1$ rispetto ad un evento $E_2$ è la probabilità che si verifichi $E_1$ sapendo che si è verificato $E_{2.}$. Tale probabilità si indica col simbolo $p\left(E_1|E_2\right)$ ed è data dalla formula

$$p\left(E_1|E_2\right) = \frac{p\left(E_1 \cap E_2\right)}{p\left(E_2\right)}.$$

La formula, ovviamente, ha significato se $p\left(E_2\right) \neq 0$.

Similmente, se $p\left(E_1\right) \neq 0$, la probabilità condizionata di $E_2$ rispetto a $E_1$ è data da

$$p\left(E_2|E_1\right) = \frac{p\left(E_1 \cap E_2\right)}{p\left(E_1\right)}. \tag{2.2}$$

$\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit$ Abbiamo 8 carte di $\heartsuit$. Chiamiamo $E_1$ l'evento che corrisponde alla congettura "Le $\heartsuit$ sono divise 3-2" ed $E_2$ a "Le $\heartsuit$ non sono 5-0". Sappiamo che le $\heartsuit$ non sono 5-0 (abbiamo giocato $\heartsuit$ e tutti hanno risposto), vogliamo calcolare la probabilità che siano divise 3-2 (evento $E_1$ "condizionato" dalla conoscenza dell'essersi verificato l'evento $E_2$). Dalle tabelle a pag. 17**,** ricaviamo che la probabilità che le $\heartsuit$ non siano 5-0 è $1 - 3,91\% = 96,09\%$, mentre la probabilità che siano 3-2 è $67,83\%$. Se le $\heartsuit$ sono divise 3-2, sicuramente non sono 5-0, quindi $E_1 \subset E_2$ e $E_1 \cap E_2 = E_1$; la probabilità che i due eventi si verifichino simultaneamente $p\left(E_1 \cap E_2\right)$ è uguale a $p\left(E_1\right) = 67,83\%$ . La formula 2.2 ci da[3]

$$p\left(E_1|E_2\right) = \frac{p\left(E_1 \cap E_2\right)}{p\left(E_2\right)} = \frac{p\left(E_1\right)}{p\left(E_2\right)} = \frac{67,83\%}{96,09\%} = \frac{67,83}{96,09} = 0,7059 = 70,59\%.$$

*Due eventi $E_1$ ed $E_2$ sono indipendenti se*

$$p\left(E_1|E_2\right) = p\left(E_1\right) \qquad \text{e} \qquad p\left(E_2|E_1\right) = p\left(E_2\right). \tag{2.3}$$

Queste due formule indicano che la conoscenza dell'essersi verificato uno dei due eventi non modifica la probabilità dell'altro.

[3] Che bello! I % si semplificano!

Dalle formule 2.3 si ricava che

$$p\,(E_1 \cap E_2) = p\,(E_1)\,p\,(E_2)\,. \tag{2.4}$$

• *La probabilità che due eventi tra di loro indipendenti si verifichino simultaneamente è il prodotto delle rispettive probabilità.*

Controlliamo la formula 2.4 col nostro solito esempio dei $K$ e delle $\heartsuit$

$$p\,(A) = \frac{1}{13}, \qquad p\,(B) = \frac{1}{4}, \qquad p\,(A \cap B) = p\,(A)\,p\,(B) = \frac{1}{13}\frac{1}{4} = \frac{1}{52}.$$

Se due eventi sono indipendenti la formula 2.1 si può scrivere

$$p\,(E_1 \cup E_2) = p\,(E_1) + p\,(E_2) - p\,(E_1)\,p\,(E_2)$$

oppure

$$\begin{aligned} p\,(E_1 \cup E_2) &= p\,(E_1) + (1 - p\,(E_1))\,p\,(E_2) \\ p\,(E_1 \cup E_2) &= p\,(E_2) + (1 - p\,(E_2))\,p\,(E_1)\,, \end{aligned}$$

o anche

$$\begin{aligned} p\,(E_1 \cup E_2) &= p\,(E_1) + p\left(\overline{E}_1\right)p\,(E_2) \\ p\,(E_1 \cup E_2) &= p\,(E_2) + p\left(\overline{E}_2\right)p\,(E_1)\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

Le formule 2.5 sono particolarmente significative. Esse dicono che se due eventi sono indipendenti, la probabilità che si verifichi o l'uno o l'altro dei due eventi si ottiene sommando alla probabilità di uno dei due la probabilità che questo evento non si verifichi e, simultaneamente, si verifichi l'altro.

♣♢♡♠ La riuscita di un contratto dipende da un impasse e dalla divisione 3-3 di un colore. Qual è la probabilità di riuscita del contratto, se devono verificarsi entrambe le situazioni? Qual è la probabilità se basta che se ne verifichi una delle due?

La probabilità che vada bene l'impasse è chiaramente il 50%, mentre per la divisione 3-3 è il 35,53% (tabella di pag. 16).

Se devono verificarsi entrambe le situazioni, il contratto sarà mentenuto con probabilità (gli eventi sono indipendenti, quindi si fa il prodotto delle probabilità)

$$50\% \times 35,53\% = 17,765\%.$$

Se basta che se ne verifichi una delle due, la probabilità è (vedi formula 2.1)

$$50\% + 35,53\% - 50\% \times 35,53\% = 67,765\%.$$

Quest'ultimo conto si può fare anche in un altro modo (utilizzando le formule 2.5).

Sommiamo le probabilità nei due casi "l'impasse va bene" e "l'impasse va male" (eventi chiaramente incompatibili). Nel primo caso, indipendentemente dalla divisione 3-3, abbiamo il 50% di probabilità di riuscita. Nel secondo caso, dobbiamo per forza trovare la 3-3. Questo secondo caso ha probabilità $50\% \times 35,53\% = 17,76\%$ (50% per l'impasse che va male e $35,53\%$ per la divisione), quindi

$$50\% + 17,765\% = 67,765\%.$$

Oppure, si possono sommare le probabilità nei due casi "divisione favorevole" e "divisione sfavorevole" (probabilità: $1 - 35,53\% = 64,47\%$). Nel primo caso abbiamo il $35,53\%$ di probabilità di riuscita del contatto, indipendentemente dalla riuscita dell'impasse. Nel secondo caso (deve andar bene l'impasse) si ha la probabilità $64,47\% \times 50\% = 32,235\%$. Sommando

$$35,53\% + 32,235\% = 67,765\%.$$

Attenzione! Se per fare i conti è indifferente l'ordine in cui si considerano gli eventi, nel gioco questo generalmente non vale.

♣♢♡♠ La riuscita di un contratto dipende dalla divisione 2-2 di una palo di 9 carte, dalla caduta di una $Q$ seconda in un palo di 8 carte e da un expasse. Basta che si verifichi una delle tre situazioni.

La divisione 2-2 ha la probabilità del 40,7% (pag. 16), la $Q$ seconda in un palo di 8 carte del 27,13% (pag. 18) e l'expasse del 50%.

Se c'è la 2-2 il nostro contratto è mantentuto, altrimenti nel 59,3% dei casi in cui non c'è la 2-2, può verificarsi la caduta della $Q$ con probabilità $59,3\% \times 27,13\% = 16,09\%$ . Sommando questo risultato alla probabilità della 2-2 si ottiene 56,79%. Se non si verifica né la 2-2 né la caduta della $Q$ $(1 - 56,79\% = 43,21\%)$ , può ancora andar bene l'expasse con probabilità $43,21\% \times 50\% = 21,6\%$. Sommando si ottiene

$$40,7\% + 16,09\% + 21,6\% = 78,39\%.$$

Controlliamo il risultato invertendo l'ordine degli eventi. Se va bene l'expasse abbiamo già un 50% di probabilità a nostro favore, nel restante 50% può cadere la $Q$ seconda $(50\% \times 27,13\% = 13,56\%)$. Sommando abbiamo 63,56%. Se i due eventi non si verificano $(36,44\% = 1 - 63,56\%)$ si può ancora avere la divisione 2-2 (probabilità $36,44\% \times 40,7\% = 14,83\%$). Alla fine otteniamo

$$50\% + 13,56\% + 14,83\% = 78,39\%.$$

Attenzione! Lo ripetiamo ancora. Se per fare i conti è indifferente l'ordine in cui si considerano gli eventi, nel gioco questo generalmente non vale. Facendo per primo l'expasse, se questo va male, potrebbe capitare di trovarsi sotto immediatamente, essendosi giocati solo il 50% di possibilità anziché il 78,39%.

## 2.2 Ma le ♣ ci sono?

♣♢♡♠ (Più difficile[4]) Supponiamo di aver aperto di 1 ♣, il compagno dice 1 ♢ e noi rispondiamo 1 SA. Giochiamo "Quinta nobile, ♢ quarto" e la convenzione Walsh (il rispondente con mano debole anticipa il nobile), quindi stiamo mostrando una mano semibilanciata di punteggio 12-14, ossia possiamo avere una 4-3-3-3 (anche con la quarta nobile), una 4-4-3-2 o una 5-3-3-2 con la quinta di ♣.

Qual è la probabilità che la nostra apertura di 1 ♣ sia stata fatta con sole 2 carte? Qual è la probabilità che sia stata fatta con almeno 4 carte?

Sia $E_1$ l'evento che corrisponde alla congettura:

"L'apertore di 1 ♣ ha una mano bilanciata di 12-14 punti con solo 2 carte di ♣"

e sia $E_2$ l'evento che corrisponde alla congettura:

"L'apertore di 1 ♣ ha una mano bilanciata o una 5-3-3-2 con la quinta di ♣, di 12-14 punti".

[4]... e anche un po' noioso.
Cercate di arrivare in fondo senza perdervi nei conti. La conclusione è interessante.

Si apre di 1 ♣ con sole 2 carte la 4-4-3-2 che presenta 4 carte di ♠ e di ♡, 3 di ♢ e 2 di ♣. Tale distribuzione, delle 12 possibili[5] 4-4-3-2, sul totale delle distribuzioni possibili, ha una frequenza dell'1,8% (vedi tabelle a pag. 16).

Delle altre 4-4-3-2 si apre poi di 1 ♣, con sole 3 carte, la mano che presenta 4 carte nei nobili e 2 a ♢ (frequenza 1,8%) e si aprono di 1 ♣ quarto le sei mani che hanno 4 carte a ♣ (frequenza 10,78%). Le rimanenti si aprono di 1 ♢.

Le 4-3-3-3 si aprono di 1 ♣, tranne quella con 4 carte di ♢ (frequenza $\simeq 7,9\%$, dato che ciascuna delle quattro 4-3-3-3 ha una frequenza di $\simeq 2,635\%$).

Di possibili distribuzioni[6] 5-3-3-2 ce ne sono 12, tre si aprono di 1 ♣ (frequenza $\simeq 15,52\%$ diviso $4 = 3,88\%$).

In totale la frequenza dell'apertura di 1 ♣ è circa

$$1,8\% + 1,8\% + 10,78\% + 7,9\% + 3,88\% = 26,16\%.$$

Volendo calcolare la probabilità di avere l'apertura di 1 ♣ (nel sistema "Quinta nobile, ♢ quarto") con una mano bilanciata o semibilanciata di punteggio 12-14, si dovrebbe moltiplicare questo risultato per la probabilità di avere una mano (qualsiasi) di punteggio 12-14, ma come vedremo, si può farne a meno. Limitiamoci ad indicare con $p$ questa probabilità. Tutti i risultati ottenuti (anche quelli sotto) andrebbero moltiplicati per questa probabilità $p$.

Quindi la probabilità dell'evento $E_1$ è $1,8\% \times p$, mentre quella dell'evento $E_2$ è $26,16\% \times p$. Quella che ci interessa è la probabilità dell'evento $E_1$ sapendo che si è verificato $E_2$. Per la formula 2.2, dato che $E_1 \subset E_2$, si ha

$$p\,(E_1|E_2) = \frac{p\,(E_1 \cap E_2)}{p\,(E_2)} = \frac{p\,(E_1)}{p\,(E_2)} = \frac{1,8\% \times p}{26,16\% \times p} = \frac{180}{2616} \simeq 6,88\%.$$

La probabilità che l'apertura di 1 ♣ sia stata fatta con sole 2 carte è piuttosto piccola.

Riguardando i dati sopra, l'apertura è fatta con 3 carte in due casi: con la 4-4-3-2 con 4 carte nei nobili e 2 a ♢ e le due 4-3-3-3 che hanno 4 carte in un nobile. La frequenza è (evitiamo di moltiplicare per $p$, abbiamo già visto che se dobbiamo fare il rapporto si semplifica)

$$1,8\% + 5,27\% = 7,07\%.$$

Nei rimanenti casi è fatta con 4 carte. La frequenza è

$$10,78\% + 2,63\% + 3,88\% = 17,29\%.$$

La probabilità che l'apertura di 1 ♣ sia stata fatta con almeno 4 carte è

$$\frac{17,29\%}{26,16\%} \simeq 66,1\%.$$

Questo esempio vuol mostrare che quando si apre di 1 ♣ nel sistema "Quinta nobile, ♢ quarto" è molto molto probabile che ♣ sia un palo vero.

Abbiamo fatto dei conti considerando solo le mani bilanciate e semibilanciate non di rever. Ma ci sono altre mani che si aprono di ♣.

Si aprono di 1 ♣ con:

— 4 carte, le 4-4-4-1 con singolo rosso, che hanno la frequenza dell'1,5%;

---

[5] Il palo terzo può essere preso in 4 modi, quello secondo in 3 (non può coincidere col terzo), quindi si ha $4 \cdot 3 = 12$.

[6] Il palo quinto può essere preso in 4 modi, quello secondo in 3 (non può coincidere col quinto), quindi si ha $4 \cdot 3 = 12$.

— 5 carte, le bicolori 5-4-3-1, 5-4-2-2 (3,23%+2,64%), la tricolore 5-4-4 con ♣ quinte (0,31%) e hanno in totale la frequenza del 6,18%;

— 6 carte, le 6-3-2-2, 6-4-2-1, 6-3-3-1, 6-4-3-0 che hanno in totale una frequenza del 3,78%;

— 7 carte, le 7-3-2-1, 7-2-2-2, 7-4-1-1, 7-4-2-0, 7-3-3-0, che hanno in totale la frequenza dello 0,85%.

Si potrebbero poi aggiungere altre mani, ma la loro frequenza è molto bassa. Sommando le frequenze scritte (abbiamo preso in considerazione solo le 20 distribuzioni più frequenti e non abbiamo considerato le 6-5) si ottiene 12,31%.

Riassumendo e considerando i calcoli precedenti, le mani che si aprono di ♣ (nella fascia 12-14), hanno frequenza

$$26,16\% + 12,31\% = 38,47\%,$$

quelle con 4 o più carte

$$17,29\% + 12,31\% = 29,6\%.$$

I due risultati scritti andrebbero moltiplicati per la probabilità di avere 12-14 punti, che sopra ci siamo limitati a chiamare $p$.

Poi ci sono tutte le mani con 15-17 punti. Le mani bilanciate e semibilanciate si aprono di 1 SA. Tolte queste, rimangono tutte le altre, con frequenza (vedi sopra): 12,31%.

Possiamo supporre poi che le bilanciate 18-20 si aprano di 1 ♣ con la stessa frequenza di quelle 12-14.[7]

Dalle tabelle di pag. 21, leggiamo che la probabilità di avere una mano di 12-14 punti è il 20,63% ($= 8,03\% + 6,91\% + 5,69\%$), di averne 15-17 è il 10,09% ($= 4,42\% + 3,31\% + 2,36\%$) e di averne 18-20 il 3,29% ($= 1,61\% + 1,04\% + 0,64\%$).

In totale, la probabilità di avere l'apertura e aprire con le ♣ almeno quarte è circa

$$29,6\% \times (20,63\% + 3,29\%) + 12,31\% \times 10,09\% = 8,32\%.$$

La probabilità di avere l'apertura e aprire di 1 ♣ è circa

$$38,47\% \times (20,63\% + 3,29\%) + 12,31\% \times 10,09\% = 10,44\%.$$

Facendo il rapporto, si trova:

$$\frac{8,32\%}{10,44\%} = 79,69\%.$$

• *La probabilità che le ♣ siano vere è circa l'*80%.

La probabilità che l'apertura di 1 ♣ sia fatta con sole due carte è

$$\frac{1,8\% \times (20,63\% + 3,29\%)}{10,44\%} \simeq 4,12\%.$$

Nell'impostare un sistema di intervento, conviene pensare che chi ha aperto[8] di 1 ♣ le ♣ le abbia.

Non ha molto senso un intervento di 2 ♣ naturale sull'apertura di 1 ♣ del sistema "Quinta nobile, ♢ quarto", conviene dare a tale licita un significato convenzionale, per esempio può mostrare una 5-4 nei nobili.

Si possono fare conti simili per mostrare che, anche nel sistema "Quinta nobile, miglior minore", conviene pensare che chi ha aperto di 1 ♢ abbia almeno 4 carte.

Ancora, si può mostrare che è meno probabile aprire con sole 2 carte di ♣ nel sistema "Quinta nobile, ♢ quarto" che con 3 carte di ♢, giocando "Quinta nobile, miglior minore".

[7] C'è chi con 20 apre già di 2 SA, c'è chi per le bilanciate 18-20 ha un'apertura "speciale", c'è chi le apre di 1 ♢ solo se le ♢ sono quinte... Ma tutto ciò, per i nostri conti, comporta differenze piccolissime.

[8] Se gioca il sistema "Quinta nobile ♢, quarto" o anche "Quinta nobile, miglior minore".

## 2.3 Chiamare o non chiamare manche?

**Numero aleatorio e valore atteso**. Pensiamo di giocare alla roulette e puntiamo 1 € sul nero. Se esce un numero nero ritiriamo dal banco 2 €, quindi vinciamo 1 €, altrimenti, se esce un numero rosso o lo 0, l'euro è perso. La "vincita" (in senso lato, potrebbe anche essere negativa) è un *numero aleatorio* che può assumere i due valori $-1$ e 1, rispettivamente con probabilità $\frac{19}{36}$ e $\frac{18}{36}$. Schematizziamo:

$$\begin{cases} -1 & 1 \\ \frac{19}{36} & \frac{18}{36} \end{cases}$$

Senza voler essere troppo rigorosi, possiamo dire che un numero aleatorio è un valore numerico al quale è associata una probabilità. Può essere, per esempio, una somma di denaro vinta o persa in una scommessa. Limitiamoci a considerare numeri aleatori che assumano solo due valori $x$ e $y$ con probabilità $p$ e $1-p$.

$$\begin{cases} x & y \\ p & 1-p \end{cases}$$

Il valore

$$xp + y(1-p)$$

si chiama *valore atteso* o *valor medio* del numero aleatorio. Nell'esempio della roulette, si ha

$$-1 \times \frac{19}{36} + 1 \times \frac{18}{36} = -\frac{1}{36}.$$

Se vogliamo rimenere legati alle scommesse, se la scommessa è equa questo valore deve essere 0. La roulette non lo è, visto il valore negativo. Lo sarebbe se togliessimo lo 0.

Tra due scommesse, legate allo stesso esperimento, con le stesse probabilità, risulterà più conveniente per noi quella con valore atteso maggiore.

♣♢♡♠ Qual è la minima percentuale di successo di una manche in seconda?

Per esempio, consideriamo una manche a ♡ (in un nobile). Pensiamo di giocare una partita in 4, segnando i punti come nei tornei, utilizzando il sistema chiamato Chicago. Sia $p$ la probabilità di successo della manche e pensiamo alla "scommessa": "*chiamo o non chiamo la manche*". Ci sono due scenari possibili[9]

A) *Chiamo la manche*. In questo caso, si vince 620 punti se c'è e si perde 100 se non c'è, ossia si vince 620 con probabilità $p$ e si perde 100 con probabilità $(1-p)$.

$$\begin{cases} 620 & -100 \\ p & 1-p \end{cases}$$

B) *Non chiamo la manche*. In questo caso, si vince 170 se c'è e si vince 140 se non c'è, ossia si vince 170 con probabilità $p$ e 140 con probabilità $(1-p)$.

$$\begin{cases} 170 & 140 \\ p & 1-p \end{cases}$$

Qual è la minima percentuale di successo per cui la strategia A è preferibile alla B?

Le due strategie saranno equivalenti se i rispettivi valori attesi:

$$\text{A) } 620p - 100(1-p) \qquad \text{B) } 170p + 140(1-p)$$

risultano uguali. Ciò accade se

$$620p - 100(1-p) = 170p + 140(1-p),$$

[9] Per semplificare, non consideriamo il caso che si possa andar sotto di due prese o che l'avversario contri.

ossia

$$\begin{aligned} 690p &= 240 \\ p &= \frac{240}{690} \simeq 34,8\%. \end{aligned}$$

La strategia A) sarà preferibile a B) se $p$ risulta maggiore del valore trovato. La minima percentuale di successo è circa il 34,8%.

Questi conti sono stati fatti pensando di giocare in "partita libera agonistica" (Chicago). Nel caso di torneo Mitchell, le manche dovrebbero essere chiamate al 50% (salvo valutazioni che non si fondano sul calcolo delle probabilità[10]). Nel caso di duplicato, invece dei punti, si devono considerare i match points (M.P.), ma i conti, come mostra il prossimo esempio, sono molto simili.

♣♢♡♠ Qual è la minima percentuale di successo di un piccolo Slam?

Supponiamo di giocare in duplicato. Per esempio, consideriamo un piccolo Slam a ♣ (in un minore) in seconda. Sia $p$ la probabilità di successo dello Slam e pensiamo alla "scommessa": "*chiamo o non chiamo lo Slam*". Ci sono due scenari possibili e supponiamo che questi si verifichino nei due tavoli A) sala aperta, B) sala chiusa. Noi giochiamo in sala aperta.

A) *Chiamo lo slam.* In questo caso, si vince 1370 se c'è e si perde 100 se non c'è, ossia si vince 1370 con probabilità $p$ e si perde 100 con probabilità $(1-p)$.

$$\left\{ \begin{array}{cc} 1370 & -100 \\ p & 1-p \end{array} \right.$$

B) *Non chiamo lo Slam.* In questo caso, si vince 620 se c'è e si vince 600 se non c'è, ossia si vince 620 con probabilità $p$ e 600 con probabilità $(1-p)$.

$$\left\{ \begin{array}{cc} 620 & 600 \\ p & 1-p \end{array} \right.$$

La differenza dei risultati dei due tavoli è 750 a nostro favore se c'è lo Slam, $-700$ (700 a favore degli avversari) se non c'è. Traducendo in M.P. si ha nel primo caso si ha un guadagno di 13 M.P., nel secondo una perdita di 12. Quindi si ha

$$\left\{ \begin{array}{cc} 13 & -12 \\ p & 1-p \end{array} \right.$$

Questa "scommessa" risulta equa se il valore atteso è 0, ossia

$$\begin{aligned} 13p - 12\,(1-p) &= 0 \\ 25p &= 12 \\ p &= \frac{12}{25} = 48\%. \end{aligned}$$

La minima percentuale di successo risulta, quindi, il 48%.

Con conti analoghi si può può stabilire che la manche in prima si può chiamare[11] al 40,5%, in zona al 35%, il piccolo Slam nel minore in prima al 47,6%, il piccolo Slam nel nobile o a SA al 50% (sia in prima che in zona). Per il grande Slam ci vuole maggior prudenza, la percentuale di successo deve essere almeno il 56% in prima e il 55,2% (nel minore) o il 56,7% (nel nobile) in seconda[12].

---

[10] Sulla psicologia?

[11] In un torneo a squadre o in un duplicato.

[12] Risultati calcolati ipotizzando che gli avversari chiamino il piccolo Slam e mantengano il contratto.

# 3

# Calcolo combinatorio

Qual è il numero di tutte le possibili combinazioni di una mano di bridge?
Come si calcola la probabilità di avere una distribuzione 4-3-3-3?
Come si calcola la probabilità che avendo 8 carte in un palo, i resti siano 3-2?
Qual è la probabilità di avere l'apertura di 1 SA?
Per rispondere a queste domande bisogna conoscere un pochino di calcolo combinatorio.
Iniziamo parlando di *allineamenti* o *permutazioni*.
Quanti sono gli allineamenti di $n$ oggetti distinti? (Noi parleremo di carte).
Pensiamo di avere due carte: un $A$ e un $K$. Gli allineamenti sono ovviamente 2

$$AK, \qquad KA.$$

Prendiamone tre: un $A$, un $K$ e una $Q$. Gli allineamenti sono 6

$$\begin{array}{ccc} AKQ, & AQK, & KAQ, \\ KQA, & QAK, & QKA. \end{array}$$

Prendiamone quattro e proviamo a contarli senza scriverli. Al primo posto possiamo mettere una qualsiasi delle quattro carte, quindi abbiamo 4 possibilità per occupare il primo posto, per occupare il secondo ne abbiamo 3 (togliamo la carta già sistemata), per occupare il terzo ne abbiamo 2 e per l'ultimo posto non ci rimane scelta: ci è rimasta una carta sola.

Abbiamo quindi $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibili allineamenti.

Generalizziamo: con $n$ carte, al primo posto possiamo mettere una qualsiasi delle $n$ carte, al secondo una delle rimanenti $n-1$, al terzo una delle rimanenti $n-2$ e così via, finché per il penultimo posto avremo solo 2 possibili scelte e per l'ultimo la scelta è obbligata. Si ottiene

$$n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 2\cdot 1.$$

Questo numero, che altro non è che il prodotto dei primi interi da 1 a $n$ si indica col simbolo $n!$
Si ha[1]

$$\begin{aligned} 0! &= 1, \qquad 1! = 1, \qquad 2! = 2\cdot 1! = 2, \qquad 3! = 3\cdot 2! = 6, \qquad 4! = 4\cdot 3! = 24, \\ 5! &= 5\cdot 4! = 120, \qquad 6! = 6\cdot 5! = 720, \qquad 7! = 7\cdot 6! = 5040, \ldots \qquad n! = n\cdot(n-1)! \end{aligned}$$

[1] $0! = 1$ è una definizione "di comodo".

In questo modo, ricorsivamente, si possono calcolare tutti i fattoriali.
Per curiosità: $13! = 6227020800$.

Invece di allineare tutti gli $n$ oggetti a disposizione, pensiamo di sceglierne un dato numero $k$ ($< n$) e di allineare questi.

Iniziamo con un esempio. Abbiamo quattro carte. Vogliamo sceglierne e allinearne due. Al primo posto possiamo mettere una qualsiasi delle quattro carte, al secondo una qualsiasi delle rimanenti tre e... abbiamo finito, gli allineamenti sono $4 \times 3 = 12$.

Generalizziamo, abbiamo $k$ posti ed $n$ oggetti (distinti). Il primo posto può essere occupato in $n$ modi, il secondo in $n - 1$ e così via. Quando mi fermo? Quando avrò riempito i $k$ posti e quindi quando avrò scritto il prodotto di $k$ interi decrescenti a partire da $n$

$$n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)$$

Perché l'ultimo fattore è scritto così? Perché per occupare il $k$-esimo posto ho la possibilità di scegliere tra gli oggetti rimasti, che, visto che $k - 1$ sono già stati sistemati, sono esattamente $n - (k - 1) = n - k + 1$.

Tutto sommato, però, a noi non interessa poi così tanto allineare le carte, quello che ci interessa è sapere in quanti modi si può estrarre un certo numero di carte da un mazzo, indipendentemente dall'ordine. Lo vediamo immediatamente.

## 3.1 Combinazioni

Si chiama *combinazione* ogni scelta di $k$ oggetti presi tra $n$ oggetti diversi tra loro ($k < n$). Quello che vogliamo calcolare è il numero delle combinazioni.

Pensiamo di voler pescare tre carte da un mazzetto di dieci, in quanti modi lo possiamo fare?

Se ci interessasse l'ordine il numero sarebbe $10 \cdot 9 \cdot 8$, come appena visto. Ma l'ordine non ci interessa, quindi gli allineamenti che contengono le stesse carte corrispondono ad un'unica scelta. Visto che gli allineamenti di tre carte sono 6, dovremo dividere il numero sopra scritto per 6, ottenendo $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$.

Generalizzando, volendo scegliere gli oggetti allineati, avremmo $n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)$ possibilità, ma se l'ordine non interessa, ai $k!$ allineamenti dei $k$ oggetti scelti corrisponde un'unica combinazione, quindi il numero delle combinazioni di $k$ oggetti scelti tra $n$ è

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}. \tag{3.1}$$

Questo numero[2] viene solitamente indicato col simbolo[3]

$$\binom{n}{k}$$

e chiamato *coefficiente binomiale*.

Si può anche scrivere

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{3.2}$$

Questa formula si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore della precedente per $(n - k)!$. La formula ha senso anche se $n = 0$, $k = 0$ e $k = n$, visto che sopra abbiamo definito $0! = 1$.

[2] Che nonostante il truce aspetto è intero.

[3] Se volete, potete anche dimenticarvi come si calcola $\binom{n}{k}$, ma per capire gli esempi che seguono è importante che sappiate che questo simbolo indica il numero dei modi in cui si possono scegliere $k$ carte da un gruppo di $n$.

Alla formula 3.2 si può arrivare anche in questo modo. Pensiamo di mettere in fila i nostri oggetti e di segnare in qualche modo quelli scelti, per esempio con un SI o con un NO, con un $\Box$ o con una $\bigstar$, con un $\blacktriangle$ o con un $\Diamond$, ... allora il numero di combinazioni $k$ oggetti scelti tra $n$ risulta uguale al numero di allineamenti di $n$ oggetti, di cui $k$ sono uguali tra di loro e $n-k$, diversi di precedenti, sono uguali tra di loro. Gli allineamenti di $n$ oggetti distinti sono $n!$, ma se $k$ sono uguali tra di loro, scambiandoli in tutti i modi possibili si ottiene lo stesso allineamento e lo stesso vale per gli altri $n-k$. Il numero di allineamenti di $n$ oggetti, di cui $k$ uguali tra di loro e $n-k$ uguali tra di loro si ottiene quindi divedendo $n!$ per $k!$ (allineamenti di $k$ oggetti) e $(n-k)!$ (allineamenti di $n-k$ oggetti).

Si dovrebbe intuire a questo punto che il numero degli oggetti scelti è per forza uguale a quello di quelli *non* scelti.

Pensiamo, per esempio, di prendere 13 carte dal solito mazzo di 52 e di allinearle. Gli allineamenti sono 13!. Ora pensiamo di non distinguere l'una dall'altra carte nere e lo stesso facciamo per le carte rosse. Supponiamo che le carte nere siano 8 e le rosse 5. Noi possiamo mischiare in tutti i modi possibili le 8 carte nere ottenendo lo stesso allineamento. I modi in cui possiamo allineare le carte nere sono 8!. A ciascuno di questi corrisponde lo stesso allineamento di 13 carte nere e rosse. Lo stesso discorso vale per le carte rosse. I modi in cui possiamo allinearle sono 5! e a ciascuno di questi corrisponde lo stesso allineamento di 13 carte nere e rosse. Gli allineamenti di 13 carte di cui 8 nere (uguali tra loro) e 5 rosse (uguali tra loro) sono

$$\frac{13!}{8!\cdot 5!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{5!} = \binom{13}{5} = 1287.$$

Questo è il numero dei modi di scegliere 5 carte da un mazzo di 13, ma anche il numero dei modi di scegliere 8 carte da un mazzo di 13.

Vale la proprietà

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{3.3}$$

I coefficienti binomiali hanno una seconda proprietà

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{3.4}$$

che permette di costruire quella curiosa configurazione nota come Triangolo di Tartaglia[4].

$$\begin{array}{c}
1 \qquad 1 \\
1 \qquad 2 \qquad 1 \\
1 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 1 \\
1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1 \\
1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1 \\
1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1 \\
1 \qquad 7 \qquad 21 \qquad 35 \qquad 35 \qquad 21 \qquad 7 \qquad 1 \\
\vdots
\end{array}$$

I numeri scritti nella prima riga sono i coefficienti binomiali corrispondenti a $n=1$ ($k=0$ e $k=1$), nella seconda a $n=2$ ($k=0$, 1 e 2), nella terza a $n=3$ e così via. Per esempio, i due 15 della penultima riga sono $\binom{6}{2}$ e $\binom{6}{4}$. Ci siamo fermati a $n=7$, ma non è difficile andare avanti.

Il triangolo è costruito grazie alla proprietà 3.4, infatti ogni numero (a parte gli 1 iniziale e finale) risulta essere la somma dei due scritti sopra. La simmetria della configurazione mostra la validità della formula 3.3.

[4] Ma cosa c'entra il triangolo di Tartaglia col Bridge?

Siamo in grado di rispondere alle domande fatte all'inizio.

Qual è il numero di tutte le possibili combinazioni di una mano di bridge? Equivale a dire: in quanti modi posso scegliere 13 carte da un mazzo di 52? Questo numero è[5] (ovviamente è stato calcolato col computer)

$$\binom{52}{13} = \frac{53 \cdot 52 \cdot \dots \cdot 40}{13!} = 635013559600.$$

**Per i più curiosi**. Dimostriamo la proprietà 3.4 dei coefficienti binomiali. Pensiamo pure agli allineamenti di $\square$ (sono $k$) e $\bigstar$ (sono $n-k$) e contiamo separatamente, quelli che iniziano con un $\square$ e quelli con una $\bigstar$. Quelli che iniziano con un $\square$ sono $\binom{n-1}{k-1}$ (tolto il primo $\square$, rimangono da contare gli allineamenti di $n-1$ oggetti di cui $k-1$ sono $\square$ e questo è il numero delle possibili scelte di $k-1$ oggetti tra $n-1$). Quelli che iniziano con una $\bigstar$ sono $\binom{n-1}{k}$ (tolta la prima $\bigstar$, rimangono da contare gli allineamenti di $n-1$ oggetti di cui $k$ sono $\square$ e questo è il numero delle possibili scelte di $k-1$ oggetti tra $n-1$). La somma dei due è chiaramente $\binom{n}{k}$.

## 3.2 Probabilità delle distribuzioni

♣♢♡♠ Come si calcola la probabilità di avere una distribuzione 4-3-3-3?

Iniziamo a calcolare il numero di mani che hanno la distribuzione 4-3-3-3 con, per esempio, 4 carte di ♠. Le 4 carte di ♠ possono essere scelte in $\binom{13}{4}$ modi, quelle degli altri semi in $\binom{13}{3}$ modi, quindi ottieniamo $\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{3}$. Questo valore andrà poi moltiplicato per 4 perché le quattro carte possono essere anche in uno degli altri semi. Ciò che troviamo è il numero degli esiti favorevoli (tutte le possibili 4-3-3-3), per ottenere la probabilità, dobbiamo dividerlo per il numero degli esiti possibili, che è il valore $\binom{52}{13}$ calcolato sopra. Si ha[6]

$$4\frac{\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{3}}{\binom{52}{13}} \simeq 10,54\%.$$

Questo esempio mostra come si sono state costruite le seguenti tavole, che riportano la probabilità delle distribuzioni. Delle possibili 39 distribuzioni sono state riportate solo le 24 più frequenti. Quelle che non compaiono nella tabella hanno una frequenza inferiore allo 0,1%.

| Distribuzione | Probabilità | Distribuzione | Probabilità | Distribuzione | Probabilità |
|---|---|---|---|---|---|
| 4-4-3-2 | 21,55% | 5-5-2-1 | 3,17% | 7-2-2-2 | 0,51% |
| 5-3-3-2 | 15,52% | 4-4-4-1 | 2,99% | 7-4-1-1 | 0,39% |
| 5-4-3-1 | 12,93% | 7-3-2-1 | 1,88% | 7-4-2-0 | 0,36% |
| 5-4-2-2 | 10,58% | 6-4-3-0 | 1,33% | 7-3-3-0 | 0,27% |
| 4-3-3-3 | 10,54% | 5-4-4-0 | 1,24% | 8-2-2-1 | 0,19% |
| 6-3-2-2 | 5,64% | 5-5-3-0 | 0,90% | 8-3-1-1 | 0,12% |
| 6-4-2-1 | 4,70% | 6-5-1-1 | 0,71% | 8-3-2-0 | 0,11% |
| 6-3-3-1 | 3,45% | 6-5-2-0 | 0,65% | 7-5-1-0 | 0,11% |

[5] Scritto al quattordicesimo posto nella 52-esima riga del triangolo di Tartaglia.

[6] Con l'aiuto del computer.

♣♢♡♠ Come si calcola la probabilità che avendo 8 carte in un palo, i resti siano 3-2?

Vediamo le carte tra mano e morto, quindi ce ne sono 26 che possono trovarsi in mano a ciascuno degli avversari (5 del palo che ci interessa e 21 degli altri). Le possibili distribuzioni in mano a ciascun avversario sono quindi $\binom{26}{13}$. Pensiamo, per esempio, all'avversario di sinistra (Ovest) e calcoliamo la probabilità che abbia in mano 3 carte del palo che ci interessa. Queste 3 carte possono essere scelte in $\binom{5}{3}$ modi, mentre le rimanenti 10 in $\binom{21}{10}$. Le possibili distribuzioni in mano a Ovest sono $\binom{5}{3}\binom{21}{10}$. Per ottenere la probabilità, si fa il rapporto (casi favorevoli fratto casi possibili)

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{21}{10}}{\binom{26}{13}} \simeq 33,913\%.$$

Questa è la probabilità che 3 carte siano in Ovest e 2 in Est, dato che possono anche essere 2 in Ovest e 3 in Est, la probabilità che i resti siano 3-2 è esattamente il doppio cioè $67,826\%$.

Questo esempio mostra come sono state costruite le seguenti tavole, che riportano le probabilità relative alla divisione dei resti.

| Mancano | Divisione resti | Probabilità | Mancano | Divisione resti | Probabilità |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 carte | 1 - 1 | 52% | 7 carte | 4 - 3 | 62,18% |
| | 2 - 0 | 48% | | 5 - 2 | 30,52% |
| 3 carte | 2 - 1 | 78% | | 6 - 1 | 6,78% |
| | 3 - 0 | 22% | | 7 - 0 | 0,52% |
| 4 carte | 3 - 1 | 49,74% | 8 carte | 5 - 3 | 47,12% |
| | 2 - 2 | 40,70% | | 4 - 4 | 32,72% |
| | 4 - 0 | 9,56% | | 6 - 2 | 17,14% |
| 5 carte | 3 –2 | 67,83% | | 7 - 1 | 2,86% |
| | 4 - 1 | 28,26% | | 8 - 0 | 0,16% |
| | 5 - 0 | 3,91% | 9 carte | 5 - 4 | 58,90% |
| 6 carte | 4 - 2 | 48,45% | | 6 - 3 | 31,41% |
| | 3 - 3 | 35,53% | | 7 - 2 | 8,57% |
| | 5 - 1 | 14,53% | | 8 - 1 | 1,07% |
| | 6 - 0 | 1,49% | | 9 - 0 | 0,05% |

♣♢♡♠ Qual è la probabilità di trovare il $K$ secco avendo 10 carte nel seme di ♡? Qual è la probabilità di trovarlo secondo o terzo?

E, avendo 11 carte, qual è la probabilità che sia secco?

Conosciamo 26 carte (del giocante Sud e del morto Nord) su 52. La possibili distribuzioni di ogni avversario sono $\binom{26}{13}$. Sappiamo che delle 26 carte in mano agli avversari 3 sono di ♡ ($K$ e due cartine), ne rimangono 23 degli altri semi. Se, per esempio, Ovest ha il $K$ secco, oltre a quello ha 12 delle rimanenti 23 carte. Le possibilità sono $\binom{23}{12}$ (numero dei modi in cui si possono scegliere 12 carte tra 23).

La probabilità che il $K$ sia secco in Ovest risulta quindi[7]

$$\frac{\binom{23}{12}}{\binom{26}{13}} = \frac{\dfrac{23 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 12}{12!}}{\dfrac{26 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 14}{13!}} = \frac{13}{100} = 13\%.$$

La probabilità che il $K$ sia secondo è (la cartina che accompagna il Re può essere scelta in due modi diversi e le altre 11 in $\binom{23}{11}$ modi)

$$\frac{2 \cdot \binom{23}{11}}{\binom{26}{13}} = 2 \cdot \frac{\dfrac{23 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 13}{11!}}{\dfrac{26 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 14}{13!}} = \frac{13}{50} = 26\%.$$

La probabilità che il $K$ sia terzo è (fissate le 3 carte di ♡ rimangono $\binom{23}{10}$ possibilità per scegliere le altre 10)

$$\frac{\binom{23}{10}}{\binom{26}{13}} = \frac{\dfrac{23 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 14}{10!}}{\dfrac{26 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 14}{13!}} = \frac{11}{100} = 11\%.$$

Quindi le probabilità che il $K$ sia, rispettivamente, secco, secondo o terzo in mano a uno dei due avversari (anche in Est) saranno il doppio, ossia

$$26\%, \qquad 52\%, \qquad 22\%.$$

Con 11 carte. La probabilità che il $K$ sia secco in Ovest, avendo 11 carte tra mano e morto è (oltre al $K$ ci sono 12 carte cho possono essere scelte tra le 24 non di ♡)

$$\frac{\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} = \frac{\dfrac{24 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 13}{12!}}{\dfrac{26 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 14}{13!}} = \frac{13}{50} = 26\%.$$

Quindi la probabilità che il $K$ sia secco in mano a uno dei due avversari è il doppio, ossia il 52%.
La probabilità che sia secondo è il 48% (24% in Ovest, 24% in Est).
Questo calcoli mostrano che con 11 carte, se manca il $K$, conviene battere in testa, mentre con 10 conviene fare l'impasse.

Questo esempio mostra come si sono state costruite le seguenti tavole delle probabilità relative ad un onore mancante.

| Mancano | singolo | secondo | terzo | quarto | quinto | sesto | settimo | ottavo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 carte | 0,36% | 4,28% | 17,67% | 32,72% | 29,45% | 12,85% | 2,5% | 0,16% |
| 7 carte | 0,97% | 8,72% | 26,65% | 35,53% | 21,8% | 5,81% | 0,52% | |
| 6 carte | 2,42% | 16,15% | 35,53% | 32,3% | 12,11% | 1,49% | | |
| 5 carte | 5,65% | 27,13% | 40,7% | 22,61% | 3,91% | | | |
| 4 carte | 12,44% | 40,7% | 37,3% | 9,57% | | | | |
| 3 carte | 26% | 52% | 22% | | | | | |
| 2 carte | 52% | 48% | | | | | | |

[7] Questi conti, incredibilmente, si possono fare anche a mano, perché si semplifica tutto!
Abbiamo utilizzato per il calcolo del coefficienti binomiali la formula 3.1. Sopra rimangono solo un 12 e un 13, sotto un 26, un 25, un 24 e un 13 a denominatore. Il 13 si semplifica col 26, il 12 col 24...

♣♢♡♠ Se mancano due onori in un colore (per esempio, $K$ e $Q$), qual è la probabilità che siano entrambi da una parte?

Qual è la probabilità che, avendo 9 carte, uno dei due onori sia secco (e l'altro terzo)? E che siano entrambi secchi? (Ossia che un avversario abbia i due onori e l'altro due cartine).

Conosciamo 26 carte (mano e morto) su 52 e le possibili distribuzioni di ogni avversario sono $\binom{26}{13}$. Se gli onori non sono divisi, il numero di modi in cui l'avversario che *non* ha gli onori che interessano, può ricevere le carte è $\binom{24}{13}$, mentre quello che ha gli onori può riceverle in $\binom{24}{11}$ modi (due carte sono fissate, rimangono 11 posti per 24 carte).

La probabilità è uguale a[8]

$$\frac{\binom{24}{13}}{\binom{26}{13}} = \frac{\binom{24}{11}}{\binom{26}{13}} = 24\%.$$

Dai conti fatti si ricava che un doppio impasse va male solo nel 24% dei casi, mentre va bene nel rimanente 76%. In particolare, la probabilità di non perdere prese è il 24%, quella di perderne una sola il 52% (onori divisi).

Notiamo come in questo esempio si sono fatti ragionamento e conti molto simili a quelli dell'esempio precedente.

Con 9 carte, siano per esempio di ♠, calcoliamo la probabilità che Ovest abbia un onore secco (noi giochiamo sempre in Sud). Le carte di Ovest possono essere scelte in $2\binom{22}{12}$ modi (2 sono le scelte per gli onori di ♠, rimangono poi, tolte quelle di ♠, altre 22 carte, di cui se debbono scegliere 12).

La probabilità è

$$\frac{2\binom{22}{12}}{\binom{26}{13}} \simeq 12,43\%.$$

Il numero dei modi in cui Ovest può avere i due onori di ♠ secchi è $\binom{22}{11}$ (2 carte sono fissate, le altre 11 devono essere scelte tra le rimanenti 22).

La probabilità è

$$\frac{\binom{22}{11}}{\binom{26}{13}} \simeq 6,78\%.$$

Tenendo conto del fatto che possiamo scambiare Est e Ovest, i risultati trovati andranno raddoppiati, quindi la probabilità che uno dei due onori sia secco è il 24,86%, mentre la probabilità che uno dei due avversari abbia i due onori secchi e l'altro avversario 2 cartine è il 13, 56%.

Questo esempio mostra come si sono state costruite le seguenti tavole, che riportano le probabilità relative a due onori mancanti (indicati con $A$ e $B$), quando mancano 3, 4, 5 e 6 carte.

[8] I coefficienti binomiali sono uguali per la proprietà 3.3.

| Ovest | Est | Probabilità |
|---|---|---|
| Mancano 3 carte | | |
| $AB$ | $x$ | 13,00% |
| $x$ | $AB$ | 13,00% |
| $Ax$ | $B$ | 13,00% |
| $Bx$ | $A$ | 13,00% |
| $A$ | $Bx$ | 13,00% |
| $B$ | $Ax$ | 13,00% |
| $ABx$ | – | 11,00% |
| – | $ABx$ | 11,00% |
| Mancano 5 carte | | |
| $ABx$ | $xx$ | 10,17% |
| $xxx$ | $ABx$ | 10,17% |
| $Axx$ | $Bx$ | 10,17% |
| $Bxx$ | $Ax$ | 10,17% |
| $Ax$ | $Bxx$ | 10,17% |
| $Bx$ | $Axx$ | 10,17% |
| $AB$ | $xxx$ | 3,39% |
| $xxx$ | $AB$ | 3,39% |
| $ABxx$ | $x$ | 8,49% |
| $x$ | $ABxx$ | 8,49% |
| $Axxx$ | $B$ | 2,83% |
| $Bxxx$ | $A$ | 2,83% |
| $A$ | $Bxxx$ | 2,83% |
| $B$ | $Axxx$ | 2,83% |
| $ABxxx$ | – | 1,95% |
| – | $ABxxx$ | 1,95% |

| Ovest | Est | Probabilità |
|---|---|---|
| Mancano 4 carte | | |
| $AB$ | $xx$ | 6,78% |
| $xx$ | $AB$ | 6,78% |
| $Ax$ | $Bx$ | 13,57% |
| $Bx$ | $Ax$ | 13,57% |
| $ABx$ | $x$ | 12,43% |
| $x$ | $ABx$ | 12,43% |
| $Axx$ | $B$ | 6,22% |
| $Bxx$ | $A$ | 6,22% |
| $A$ | $Bxx$ | 6,22% |
| $B$ | $Axx$ | 6,22% |
| $ABxx$ | – | 4,78% |
| – | $ABxx$ | 4,78% |
| Mancano 6 carte | | |
| $ABx$ | $xxx$ | 7,11% |
| $xxx$ | $ABx$ | 7,11% |
| $Axx$ | $Bxx$ | 10,66% |
| $Bxx$ | $Axx$ | 10,66% |
| $ABxx$ | $xx$ | 9,69% |
| $xx$ | $ABxx$ | 9,69% |
| $Axxx$ | $Bx$ | 6,46% |
| $Bxxx$ | $Ax$ | 6,46% |
| $Ax$ | $Bxxx$ | 6,46% |
| $Bx$ | $Axxx$ | 6,46% |
| $AB$ | $xxxx$ | 1,61% |
| $xxxx$ | $AB$ | 1,61% |
| $ABxxx$ | $x$ | 4,84% |
| $x$ | $ABxxx$ | 4,84% |
| $Axxxx$ | $B$ | 1,21% |
| $Bxxxx$ | $A$ | 1,21% |
| $A$ | $Bxxxx$ | 1,21% |
| $B$ | $Axxxx$ | 1,21% |
| $ABxxxx$ | – | 0,75% |
| – | $ABxxxx$ | 0,75% |

## 3.3 Probabilità del punteggio

I conti sulla probabilità del punteggio sono abbastanza lunghi e noiosi, per cui ci limitiamo ad un esempio anche se non eccessivamente significativo.

♣♢♡♠ Qual è la probabilità di avere una mano con solo 5 punti?
5 punti possono essere ottenuti da una delle seguenti combinazioni di figure

$$AJ, \qquad KQ, \qquad KJJ, \qquad QQJ, \qquad QJJJ.$$

Si calcola per ciascuna il numero di volte che può presentarsi. Nell'ordine avremo

$$\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{36}{11}, \qquad \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{36}{11}, \qquad \binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{36}{10}, \qquad \binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{36}{10}, \qquad \binom{4}{1}\binom{4}{3}\binom{36}{9}.$$

Per esempio, il valore in mezzo è il prodotto del numero dei modi in cui può essere scelto il $K$, per il numero dei modi in cui possono essere scelti i due $J$, per il numero dei modi in cui possono essere scelte le rimanenti 10 carte, che è il numero dei modi in cui possono essere scelte 10 carte da un mazzo di 36, perché, tolti dal mazzo gli $A$ e le figure, rimangono 36 carte.

La probabilità, per ogni gruppo di figure, sarà ottenuta facendo il rapporto tra questi valori e il numero delle possibili combinazioni di una mano che è $\binom{52}{13}$. Poi si fa la somma, perché i vari eventi sono incompatibili. Avendo già fatto denominatore comune, si ottiene

$$\frac{4\cdot 4\binom{36}{11} + 4\cdot 4\binom{36}{11} + 4\cdot 6\binom{36}{10} + 4\cdot 6\binom{36}{10} + 4\cdot 4\binom{36}{9}}{\binom{52}{13}} \simeq 5,19\%$$

Allo stesso modo si procede per punteggi maggiori, avendo un po' più di conti da scrivere.
Per esempio, 13 punti si possono ottenere con le seguenti combinazioni di figure[9]

$$\begin{array}{lllll} AAAJ, & AAKQ, & AAKJJ, & AAQQJ, & AAQJJJ, \\ AKKK, & AKKQJ & AKKJJJ, & AKQQQ, & AKQQJJ, \\ AKQJJJJ, & AQQQQJ, & AQQQJJJ, & KKKKJ, & KKKQQ, \\ KKQQQQJ, & KKQQQJJJ, & KQQQQJJ, & KQQQJJJJ. & \end{array}$$

Per ciascuna, si calcola il numero di volte in cui può presentarsi.

Per esempio, per l'ultima scritta è $\binom{4}{1}\binom{4}{3}\binom{4}{3}\binom{36}{6} = 4\cdot 4\cdot 4\binom{36}{6}$ (4 sono le possibilità per scegliere il $K$, 4 per le tre $Q$, 4 per i tre $J$ e $\binom{36}{6} = \dfrac{36\cdot 35\cdot \cdots \cdot 31}{6!}$ per le rimanenti 6 carte.

La probabilità di ciascun gruppo di figure si ottiene dividendo il numero di volte in cui può presentarsi per il numero delle possibili combinazioni di una mano. Poi si somma il tutto.

Così si calcolano le probabilità dei punti di una mano, che è qui sotto riportata.

| Punti | Probabilità | Punti | Probabilità | Punti | Probabilità | Punti | Probabilità |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,36% | 1 | 0,79% | 2 | 1,36% | 3 | 2,46% |
| 4 | 3,85% | 5 | 5,19% | 6 | 6,55% | 7 | 8,03% |
| 8 | 8,89% | 9 | 9,36% | 10 | 9,41% | 11 | 8,94% |
| 12 | 8,03% | 13 | 6,91% | 14 | 5,69% | 15 | 4,42% |
| 16 | 3,31% | 17 | 2,36% | 18 | 1,61% | 19 | 1,04% |
| 20 | 0,64% | 21 | 0,38% | 22 | 0,21% | 23 | 0,11% |
| 24 | 0,06% | 25 | 0,03% | 26 | 0,01% | 27 | $< 0,01\%$ |

♣♢♡♠ Qual è la probabilità di avere l'apertura di 1 SA?
Basta moltiplicare la probabilità di avere una mano di 15-17 punti

$$4,42\% + 3,31\% + 2,36\% = 10,09\%$$

[9] Le avrò scritte tutte?

per quella di avere una distribuzione 4-3-3-3, 4-4-3-2 o 5-3-3-2 con 5 carte in un minore (vedi tabella a pag. 16)

$$10,54\% + 21,55\% + 7,76\% = 39,85\%.$$

In entrambi i casi si può fare la somma perchè gli eventi sono incompatibili, si può poi fare il prodotto perchè gli eventi riguardanti punteggio e distribuzione sono indipendenti.

La probabilità di avere l'apertura di 1 SA è

$$10,09\% \times 39,85\% \simeq 4,02\%.$$

# 4
# Un po' di Bridge

La matematica aiuta a prendere decisioni. Per esempio, nel scegliere tra due linee di gioco quella che offre maggiori chances. Ci dice se conviene affidarsi a un doppio impasse piuttosto che all'affrancamento di un colore, alla caduta di un onore piuttosto che a un expasse... ci suggerisce come muovere un colore.

## 4.1 Movimento del colore

Gli esempi fatti nel capitolo precedente mostrano come si possono costruire delle tabelle di probabilità. Ora vediamo come utilizzarle.

Per esempio, dalla tabella a pag. 18, possiamo dedurre che con 9 carte in un seme, se manca la $Q$, conviene battere in testa anziché fare l'impasse, perché la probabilità di trovare la $Q$ secca o seconda è maggiore di quella che vada bene l'impasse:

$$12,44\% + 40,70\% = 53,14\% > 50\%.$$

Con 8 carte conviene l'impasse, infatti la probabilità di trovare la $Q$ secca o seconda è

$$5,65\% + 27,13\% = 32,78\% < 50\%.$$

Avendo 6 carte in un seme, se manca il $J$ (e avendo il 10)[1], conviene fare l'impasse anzichè battere in testa, perché la probabilità di trovarlo secco, secondo, o terzo è minore di quella che vada bene l'impasse:

$$0,96\% + 8,76\% + 26,90\% = 36,62\% < 50\%.$$

Con 7 carte conviene battere in testa, infatti la probabilità che sia secco, secondo, o terzo è maggiore del 50%:

$$2,42\% + 16,15\% + 35,53\% = 54,1\%.$$

Prendiamo ora le tabelle a pag. 20 e vediamo anche qualche esempio quando mancano due onori.

[1] Una figura tipo $AK10x$ per $Qx$.

**1.**

Sud 7532 per Nord $AJ1094$

Per perdere una sola presa conviene battere l'$A$ o fare il doppio impasse?

Sicuramente, conviene fare il doppio impasse, che ha una probabilità di riuscita del 76%. Battendo l'$A$ si vince con la 2-2 (40,7%) o con un onore secco (probabilità $4 \times 6,22\% = 24,88\%$). Quindi 76% contro 65,58%.

E se le carte tra Nord e Sud fossero 10?

Sud 87532 per Nord $AJ1094$

Ancora la mossa giusta è partire di piccola da Sud con l'intenzione di passare il $J$. Se Ovest non risponde (11%) siamo nell'unica situazione in cui entrambe le manovre sono perdenti. Se Ovest risponde con una piccola, si passa il $J$. Si vince con probabilità uguale all'89%. Battendo subito l'$A$, si perde anche con $KQx$ in Ovest, quindi la probabilità di perdere una sola presa è il 78%.

**2.**

Sud 8532 per Nord $AQ109$

Qual è la manovra più conveniente per fare tutte le prese?

Questa è una tipica situazione di doppio impasse. Si muove da Sud piccola per il 10 e poi si ripete la manovra. Si fanno tutte le prese se $K$ e $J$ sono in Ovest. La probabilità è il 24%.

E se le carte tra Nord e Sud fossero 9?

Sud 8752 per Nord $AQ1093$

In questo caso conviene giocare, da Sud, piccola per la $Q$. Si vince col $K$ secondo in Ovest (probabilità 20,35%) e con il $K$ terzo in Ovest e il $J$ secco in Est (6,22%). Quindi la probabilità di questa manovra è il 26,57% contro il 24% del doppio impasse.

**3.**

Sud $Q1098$ per Nord $A752$

Qual è la manovra più conveniente per perdere una sola presa?

Ancora un esempio di doppio impasse. Si parte da Sud con la $Q$ o il 10 e poi si ripete la manovra. Va bene nel 76% dei casi, con gli onori divisi o entrambi in Ovest, va male nel 24%.

È uguale partire di $Q$ o di 10? Dal punto di vista "perdere una sola presa", sì. La differenza sta nel fatto che partendo di $Q$ si fanno tutte le prese col $J$ secco in Est, mentre partendo di 10 se c'è il $K$ secco in Ovest, facendo poi l'impasse al $J$ di Est (la probabilità è la stessa 2,83%).

Si potrebbe pensare di battere l'$A$ e poi giocare piccola verso la $Q$ e il 10. In tal caso si perde con $KJ$, non secchi in Ovest (probabilità $10,17\% + 8,49\% + 1,95\% = 20,61\%$) e, se si passa il 10, col $J$ in Ovest, se si passa la $Q$ col $K$ in Ovest (si suppone che, sulla cartina di Nord, Est giochi una cartina). In entrambi i casi, si perde con una figura che ha un onore terzo in Est e l'altro secondo in Ovest (10,17%). Sommando: $20,61\% + 10,17\% = 30,78\%$. È preferibile il doppio impasse.

E con 9 carte?

Sud $Q10973$ per Nord $A842$

Anche in questo caso ci sono due possibilità per fare tutte le prese: battere l'$A$ trovando il $K$ secco in Ovest (poi si fa l'impasse al $J$ di Est) o giocare la $Q$ (lisciata, se Ovest non copre) e trovare il $J$ secco in Est. La probabilità è la stessa: 6,22%.

Battendo l'$A$ si perdono due prese con $KJx$ o $KJxx$ in Ovest (probabilità $12,43\% + 4,78\%$).

Giocando la $Q$ lisciata, si perde sempre con $KJx$ e $KJxx$ in Est (probabilità $12,43\% + 4,78\%$), si può poi perdere anche con $KJ$ in Est (6,78%), se si ripete l'impasse, o con il $K$ secco in Est (6,22%) se si batte l'$A$.

Si potrebbe pensare anche di giocare piccola verso l'8. In questo caso si fanno tutte le prese col $K$ secco in Ovest, come battendo l'$A$. Si perdono due prese con $KJx$ e $KJxx$ in Est e si può poi perdere anche con $KJ$ in Est, se si ripete l'impasse, o con il $J$ secco in Est se si batte l'$A$.

Tra le linee di gioco considerate, quella che offre maggiori chances è battere per primo l'$A$.

**4.**

Sud 752 per Nord $AK109$

Per perdere una sola presa conviene battere $A$ e $K$ o fare il doppio impasse?

Prendiamo la tabella a pag. 20 e consideriamo solo le figure che sono favorevoli ad una delle due manovre e non all'altra (ossia non consideriamo quelle per cui le manovre sono indifferenti).

A favore del battere in testa abbiamo la figura che contiene $QJ$ secchi $(1,61\%)$ e quella che ha i due onori + una cartina in Est $(7,11\%)$. Nel caso che ci siano i due onori secchi si fanno tutte le prese.

A favore del doppio impasse le due figure che hanno $QJ$ in Ovest con due $(9,69\%)$, tre cartine $(4,84\%)$ o anche quattro cartine $(0,75\%)$ . In questi casi si fanno tutte le prese. Si fanno poi tutte le prese anche se Ovest ha $QJx$ $(7,11\%)$.

É indubbiamente conveniente giocare piccola al 9.

Per perdere una sola presa è però conveniente, se il 9 viene catturato da un onore, battere l'$A$ (o il $K$) e poi rifare l'impasse. Si perdono due prese se Est ha i due onori e una cartina $(7,11\%)$ , ma si vince quando ha i due onori secchi. Battere $A$ e $K$ consente di vincere (perdere una sola presa) con $QJx$ in Est, ma si perde quando Est ha un onore secondo (probabilità 12,92%).

Aumentiamo il numero delle carte

Sud 7653 per Nord $AK1098$

Qual è la linea di gioco più conveniente per fare tutte le prese?

Avendo 9 carte è chiaro che la prima mossa è battere l'$A$. Ora, supponiamo che Est giochi un onore, si deve battere il $K$ o fare l'impasse all'altro onore? La nostre tabelle ci dicono che la probabilità di trovare $QJ$ secchi in Est è il 6,78%, mentre quella che l'onore giocato da Est fosse secco è il $6,22\% + 6,22\% = 12,44\%$. È sicuramente meglio l'impasse.

Questa manovra è chiamata da molti "principio della scelta ristretta" e giustificata con ragionamenti arzigogolati. Ma basta guardare le tabelle e confrontare i numeri! La probabilità dell'impasse (dopo aver incassato l'$A$) è quasi il doppio!

## 4.2 Probabilità a priori e a posteriori

In tutti i calcoli fatti finora, le probabilità sono calcolate "a priori", ossia prima di iniziare il gioco e si intendono non influenzate dalla licita, come se gli avversari fossero sempre passati. Nella realtà, la licita degli avversari può influenzare le probabilità sia della distribuzione che del punteggio.

È chiaro che se uno degli avversari ha aperto di 1 SA, la probabilità che abbia un determinato onore aumenta decisamente.

**Posti liberi**. Ora, supponiamo che noi si giochi un contratto di 4 ♠, dopo un'apertura avversaria di 3 ♡ (barrage). Abbiamo 9 carte in atout, $AJ$ in mano (Sud) e $K10$ al morto (Nord), possiamo scegliere se battere gli atout in testa o fare l'impasse alla $Q$. Senza l'informazione fornita batteremmo $A$ e $K$, ma qui interviene la cosiddetta "teoria dei posti liberi". Ovest, che ha aperto di 3 ♡, avrà 7 carte a ♡, per le altre carte gli rimangono 6 posti liberi. Se noi tra mano e morto abbiamo 4 carte di ♡, a Est ne rimangono 2, quindi Est ha 11 posti liberi per le rimanenti carte. A questo punto è più probabile che Est abbia più carte a ♠ e quindi anche la $Q$. Dopo aver giocato il $K$ del morto (potremmo anche essere fortunati e trovare la $Q$ secca), muoveremo dal morto una piccola verso il $J$, per fare l'impasse (se la $Q$ non è caduta).

Un altro esempio: giochiamo un contratto di 6 $\heartsuit$, dopo che Ovest è intervenuto mostrando una bicolore nera. Abbiamo 11 atout e ci manca il $K$. In mano (Sud) abbiamo $A$ e $Q$. Battiamo l'$A$ o facciamo l'impasse? Senza intervento si dovrebbe battere l'$A$, ma l'intervento modifica tutto. Ovest ha 10 carte nere, gli rimangono 3 posti liberi. Se noi tra mano e morto abbiamo 10 carte nere, Est ne avrà 6 e gli rimangono 7 posti liberi. A questo punto è più probabile che Est abbia il $K$ secondo di $\heartsuit$ e faremo l'impasse.

La probabilità può cambiare "strada facendo". Facciamo un esempio: abbiamo un palo di 7 carte, abbiamo battuto due volte e tutti hanno risposto. Rigiochiamo nel palo e il primo avversario risponde. La probabilità di trovare la carta che manca in mano all'avversario che non ha ancora giocato è maggiore o minore del 50%?

Se state pensando alla probabilità della 3-3 e state per dire minore è sbagliato.

Qui ci dobbiamo ricordare della probabilità condizionata. Abbiamo avuto delle informazioni che influenzano la probabilità dell'evento $E_1$: "Le carte degli avversari sono distribuite 3-3". Sappiamo che non c'è la 6-0, non c'è la 5-1 (escludiamo l'1,49% e il 14,53%) e che il primo avversario ha almeno 3 carte. Escludiamo quindi anche metà dei casi di 4-2 (24,225%). Sostanzialmente, abbiamo l'informazione che è accaduto un evento $E_2$ di probabilità

$$1 - (1,49\% + 14,53\% + 24,225\%) = 59,755\%.$$

Questo 59,755% è anche, ovviamente, la somma di 35,53% (3-3) e 24,225% (mezza 4-2). Risulta quindi, dato che $E_1 \subset E_2$

$$p\,(E_1|E_2) = \frac{p\,(E_1 \cap E_2)}{p\,(E_2)} = \frac{p\,(E_1)}{p\,(E_2)} = \frac{35,53\%}{59,755\%} \simeq 59,46\%.$$

La 3-3 è diventata più probabile! La sua probabilità è salita oltre il 50%.